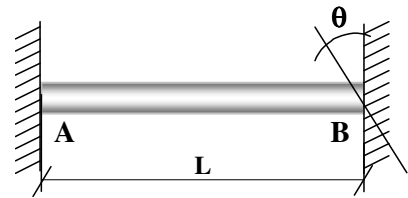
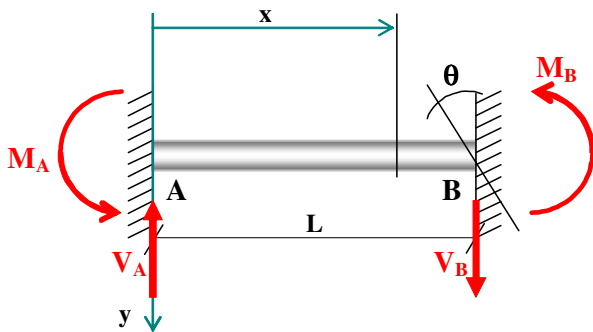


Encontre a equação da linha elástica e as reações de apoio para a viga engastada com rotação  $\theta$  no sentido anti-horário em B como vista na figura ao lado.



**Solução:**



Equação dos momentos fletores:

$$M(x) = V_A x - M_A \Rightarrow 0 \leq x \leq L$$

Equação diferencial da linha elástica:

$$EIy''(x) = -V_A x + M_A \Rightarrow 0 \leq x \leq L$$

Integrando uma vez:

$$EIy'(x) = -V_A \frac{x^2}{2} + M_A x + C_1 \Rightarrow 0 \leq x \leq L$$

Integrando Mais uma vez:

$$EIy(x) = -V_A \frac{x^3}{6} + M_A \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \Rightarrow 0 \leq x \leq L$$

Condições de contorno:

$$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow EIy(L) = -V_A \frac{L^3}{6} + M_A \frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow M_A = V_A \frac{L}{3}$$

$$y'(L) = -\theta \Rightarrow EIy'(L) = -V_A \frac{L^2}{2} + M_A L = -EI \theta \Rightarrow -V_A \frac{L^2}{2} + (V_A \frac{L}{3})L = -EI \theta$$

$$\therefore V_A = \frac{6 EI \theta}{L^2} \Rightarrow M_A = \left(\frac{6 EI \theta}{L^2}\right) \frac{L}{3} \therefore M_A = \frac{2 EI \theta}{L}$$

As demais reações podem ser calculadas utilizando as equações de equilíbrio estático:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - V_B = 0 \quad \therefore V_B = \frac{6 EI \theta}{L^2}$$

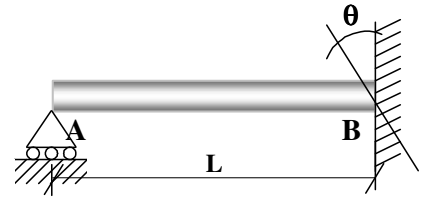
$$\sum M_z = 0 \Rightarrow V_A L - M_A - M_B = 0 \Rightarrow \left(\frac{6 EI \theta}{L^2}\right)L - \left(\frac{2 EI \theta}{L}\right) - M_B = 0 \quad \therefore M_B = \frac{4 EI \theta}{L}$$

Portanto a equações da linha elástica  $y(x)$  e de rotação  $y'(x)$  ficam assim:

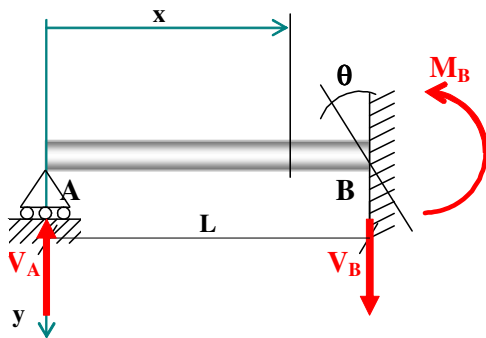
$$EIy(x) = -\left(\frac{6 EI \theta}{L^2}\right) \frac{x^3}{6} + \left(\frac{2 EI \theta}{L}\right) \frac{x^2}{2} \Rightarrow EIy(x) = -\frac{EI \theta}{L^2} x^3 + \frac{EI \theta}{L} x^2 \quad 0 \leq x \leq L$$

$$EIy'(x) = -\left(\frac{6 EI \theta}{L^2}\right) \frac{x^2}{2} + \left(\frac{2 EI \theta}{L}\right)x \Rightarrow EIy'(x) = -\frac{3 EI \theta}{L^2} x^2 + \frac{2 EI \theta}{L} x \quad 0 \leq x \leq L$$

Encontre a equação da linha elástica e as reações de apoio para a viga apoiada e engastada com rotação  $\theta$  no sentido anti-horário em B como vista na figura ao lado.



**Solução:**



Equação dos momentos fletores:

$$M(x) = V_A x \Rightarrow 0 \leq x \leq L$$

Equação diferencial da linha elástica:

$$EIy''(x) = -V_A x \Rightarrow 0 \leq x \leq L$$

Integrando uma vez:

$$EIy'(x) = -V_A \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow 0 \leq x \leq L$$

Integrando Mais uma vez:

$$EIy(x) = -V_A \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \Rightarrow 0 \leq x \leq L$$

Condições de contorno:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow EIy(L) = -V_A \frac{L^3}{6} + C_1 L = 0 \Rightarrow C_1 = V_A \frac{L^2}{6}$$

$$y'(L) = -\theta \Rightarrow EIy'(L) = -V_A \frac{L^2}{2} + C_1 = -EI\theta \Rightarrow -V_A \frac{L^2}{2} + V_A \frac{L^2}{6} = -EI\theta$$

$$\therefore V_A = \frac{3EI\theta}{L^2}$$

As demais reações podem ser calculadas utilizando as equações de equilíbrio estático:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - V_B = 0 \quad \therefore V_B = \frac{3EI\theta}{L^2}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow V_A L - M_B = 0 \Rightarrow \left(\frac{3EI\theta}{L^2}\right)L - M_B = 0 \quad \therefore M_B = \frac{3EI\theta}{L}$$

Portanto a equações da linha elástica  $y(x)$  e de rotação  $y'(x)$  ficam assim:

$$EIy(x) = -\left(\frac{3EI\theta}{L^2}\right)\frac{x^3}{6} + \left(\frac{3EI\theta}{L^2}\frac{L^2}{6}\right)x \Rightarrow EIy(x) = -\frac{EI\theta}{2L^2}x^3 + \frac{EI\theta}{2}x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$EIy'(x) = -\left(\frac{3EI\theta}{L^2}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{3EI\theta}{L^2}\frac{L^2}{6} \Rightarrow EIy'(x) = -\frac{3EI\theta}{2L^2}x^2 + \frac{EI\theta}{2} \quad 0 \leq x \leq L$$