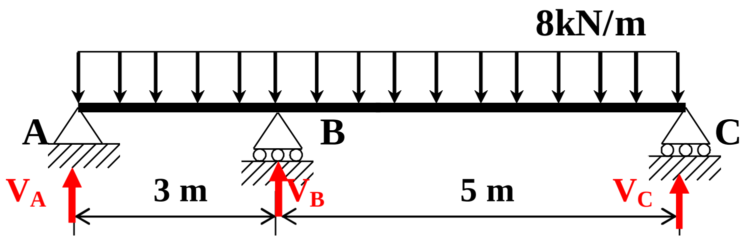
1 - Calcule as reações de apoio da viga hiperestática representada pela figura abaixo:

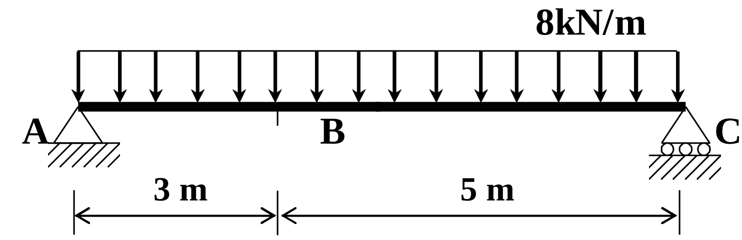
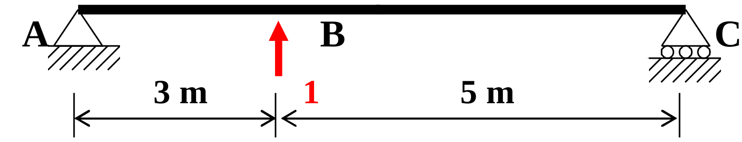


$$\sum M_z = 0 \Rightarrow$$

$$V_A \times 8 + V_B \times 5 - (8 \times 8) \times 4 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{256 - 5 \times V_B}{8}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B + V_C - (8 \times 8) = 0$$

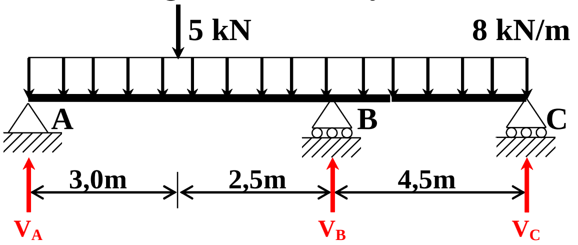
	Na tabela: $y = \frac{qx}{24EJ}(\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3)$ $\delta_1 = \frac{8 \times 3}{24 \times EJ}(8^3 - 2 \times 8 \times 3^2 + 3^3)$ $\delta_1 = \frac{395}{EJ}$ **(1)**
	Na tabela: $y = \frac{Pbx}{6\ell EJ}(\ell^2 - b^2 - x^2)$ $X_1 = \frac{-1 \times 5 \times 3}{6 \times 8 \times EJ}(8^2 - 5^2 - 3^2)$ $X_1 = \frac{-1 \times 9{,}375}{EJ}$ **(2)**

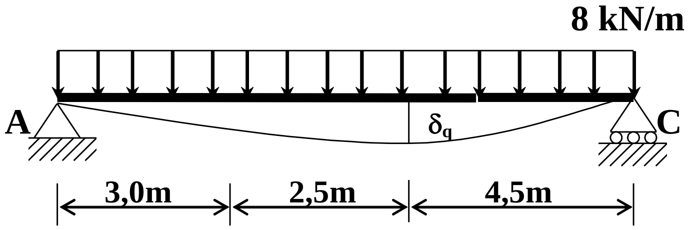
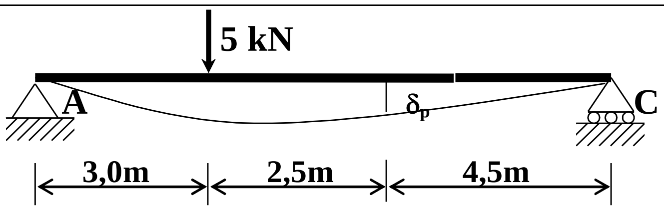
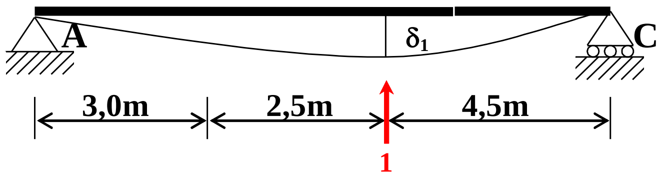
Equação de Compatibilidade: $\delta_1 + V_B X_1 = 0$

$$\delta_1 + V_B X_1 \Rightarrow \frac{395}{EJ} + V_B \frac{-9{,}375}{EJ} = 0 \Rightarrow V_B \times 9{,}375 = 395 \quad \therefore \quad \boxed{V_B = 42{,}133 \text{ kN}}$$

Com as equações de equilíbrio temos que: $\boxed{V_A = 5{,}667 \text{ kN}}$ e $\boxed{V_C = 16{,}200 \text{ kN}}$

2 – Trace os digramas de esforços solicitantes da viga contínua abaixo:



	$\delta_q = \dfrac{8\times 5{,}5}{24\times EJ}[10^3 - 2\times 10\times 5{,}5^2 + 5{,}5^3]$ $\delta_q = \dfrac{1029{,}1875}{EJ}$
 $y = \dfrac{Pbx}{6\ell EJ}(\ell^2 - b^2 - x^2)$	$\delta_p = \dfrac{5\times 3\times 4{,}5}{6\times 10\times EJ}[10^2 - 3^2 - 4{,}5^2]$ $\delta_p = \dfrac{79{,}59375}{EJ}$
	$\delta_1 = \dfrac{-1\times 4{,}5\times 5{,}5}{6\times 10\times EJ}[10^2 - 4{,}5^2 - 5{,}5^2]$ $\delta_1 = \dfrac{-20{,}41875}{EJ}$

$$(\delta_q + \delta_p) + V_B \times \delta_1 = 0 \;\Rightarrow\; V_B = -\frac{(\delta_q + \delta_p)}{\delta_1} \;\Rightarrow\; V_B = -\frac{(1029{,}1875 + 79{,}59375)}{-20{,}41875} \;\therefore\; V_B = 54{,}302\ \text{kN}$$

$V_A = 19{,}064\ \text{kN}$ e $V_C = 11{,}634\ \text{kN}$

Diagrama de Cortantes

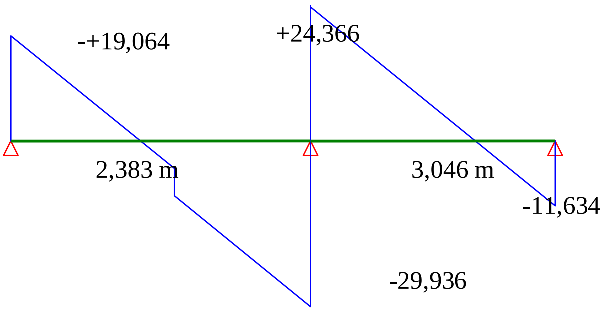
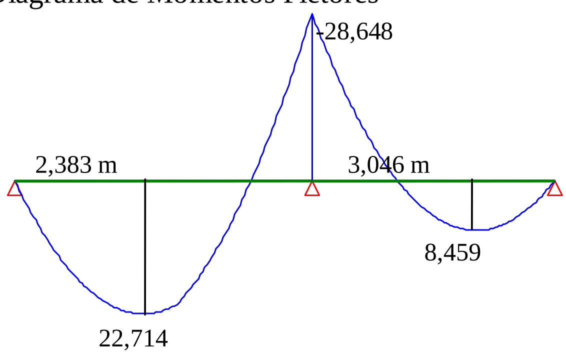
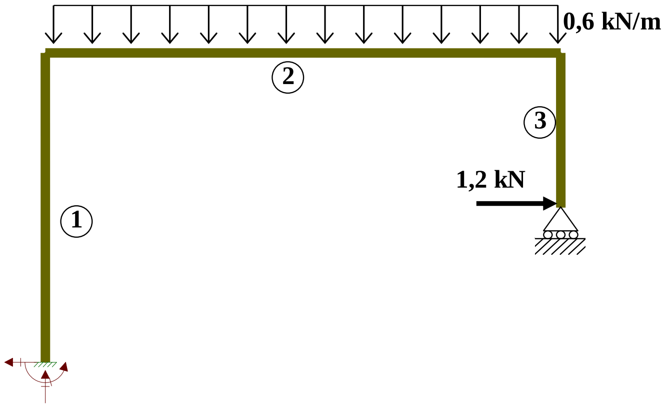
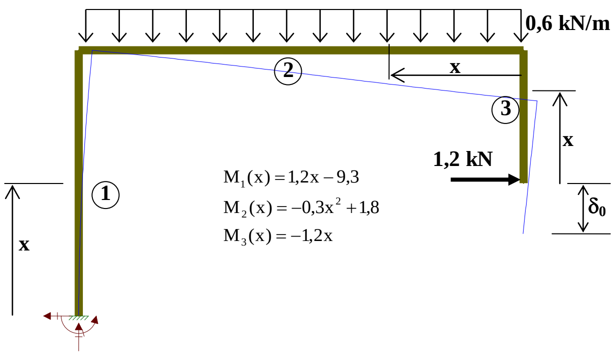


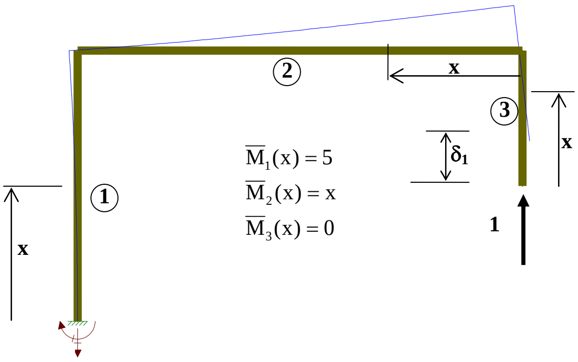
Diagrama de Momentos Fletores



3 - Calcule as reações de apoio do pórtico hiperestático representado pela figura abaixo. Considere todas as barras de mesma inércia EI e trabalhando fundamentalmente à flexão. A barra 1 tem 3 m e a barra 2 tem 5 m. As equações de momentos fletores são fornecidas para a redundante de primeiro gênero, apoio na extremidade da barra 3, que tem 1,5 m de comprimento.







Solução:

$$EI\,\delta_0 = \int_0^3 (1{,}2x - 9{,}3)(5)dx + \int_0^5 (-0{,}3x^2 + 1{,}8)(x)dx = -112{,}5 - 24{,}375 = -136{,}875$$

$$EI\,\delta_1 = \int_0^3 (5)(5)dx + \int_0^5 (x)(x)dx = 75 + 41{,}6667 = 116{,}6667$$

Equação de compatibilidade: $\delta_0 + V_B\delta_1 = 0 \Rightarrow V_B = -\dfrac{\delta_0}{\delta_1} = -\dfrac{\dfrac{-136{,}875}{EI}}{\dfrac{116{,}6667}{EI}} = 1{,}173\text{ kN}$

Resposta:

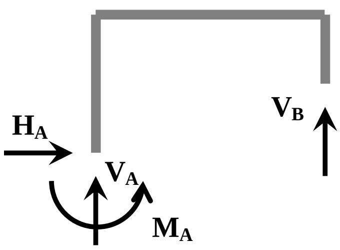
$\therefore V_B = 1{,}173\text{ kN}$

Através das equações de equilíbrio estático temos:

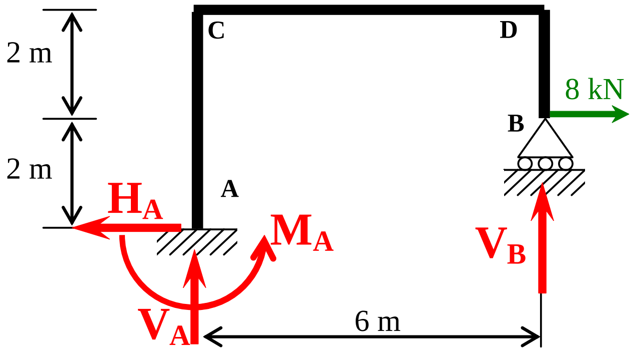
$\sum F_x = 0 \Rightarrow\ H_A = 1{,}2\text{ kN}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow\ V_A = 1{,}827\text{ kN}$

$\sum M_z = 0 \Rightarrow\ M_A = 3{,}435\text{ kN.m}$

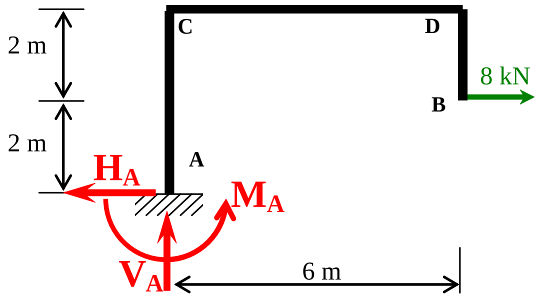


4 - Utilize o Método das Forças para calcular as reações de apoio do quadro hiperestático representado pela figura abaixo. As barras AC e BD possuem inércia à flexão EI e a barra CD tem inércia 2EI. Considere todas as barras trabalhando fundamentalmente à flexão.



Solução:

Escolhendo V_B como redundante:

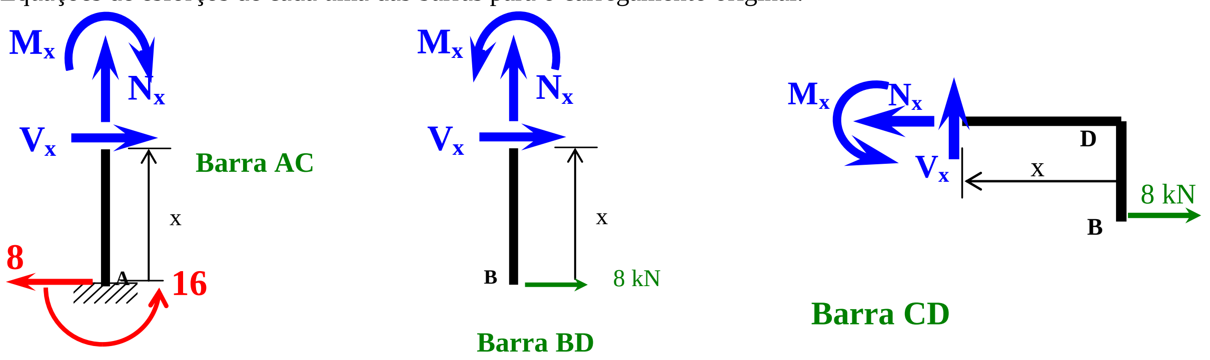


$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 8 = 0 \therefore H_A = 8\ \text{kN}$

$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_A - 8 \times 2 = 0 \therefore M_A = 16\ \text{kN.m}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A = 0 \therefore V_A = 0\ \text{kN}$

Equações de esforços de cada uma das barras para o carregamento original.



Barra AC: $0 \leq x \leq 4$

$\sum M_z = 0$

$\Rightarrow M_x - 16 + 8x = 0$

$\therefore M_x = 16 - 8x$

Barra BD: $0 \leq x \leq 2$

$\sum M_z = 0$

$\Rightarrow M_x + 8x = 0$

$\therefore M_x = -8x$

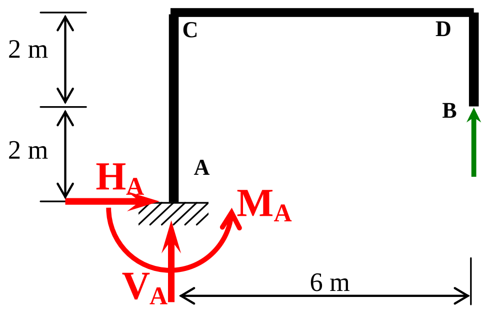
Barra CD: $0 \leq x \leq 6$

$\sum M_z = 0$

$\Rightarrow M_x + 8 \times 2 = 0$

$\therefore M_x = -16$

Equações de esforços de cada uma das barras para a carga unitária.
Retornando uma carga unitária no lugar de V_B:

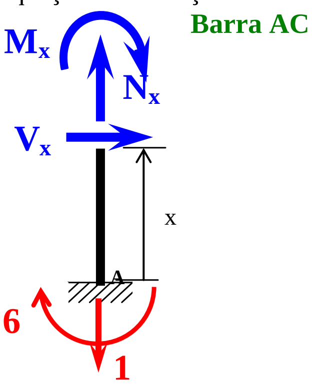


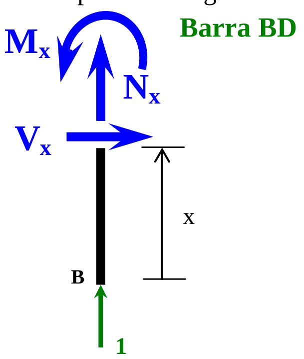
$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$

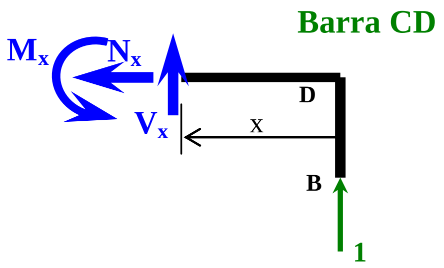
$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_A + 1 \times 6 = 0 \therefore M_A = -6$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + 1 = 0 \therefore V_A = -1$

Equações de esforços de cada uma das barras para o carregamento original.







$0 \le x \le 4$

$\sum M_z = 0$

$\Rightarrow M_x + 6 = 0$

$\therefore M_x = -6$

$0 \le x \le 2$

$\sum M_z = 0$

$\therefore M_x = 0$

$0 \le x \le 6$

$\sum M_z = 0$

$\Rightarrow M_x + 1x = 0$

$\therefore M_x = -x$

Assim, o deslocamento devido ao carregamento original, δ_0, é:

$$\delta_0 = \int_0^4 \frac{(16 - 8x)(-6)}{EI} dx + \int_0^6 \frac{(-16)(-x)}{2\ EI} dx = \frac{144}{EI}$$

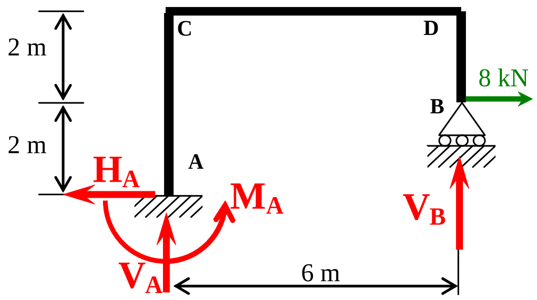
Assim, o deslocamento devido a carga unitária, δ_1, é:

$$\delta_1 = \int_0^4 \frac{(-6)(-6)}{EI} dx + \int_0^6 \frac{(-x)(-x)}{2\ EI} dx = \frac{180}{EI}$$

Portanto:

$$V_B = -\frac{\delta_0}{\delta_1} = -\frac{\frac{144}{EI}}{\frac{180}{EI}} = -0{,}8\ \text{kN}$$

As demais reações são calculadas através das equações de equilíbrio estático:



$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_A + 8 = 0$

$\therefore H_A = 8\ \text{kN}$

$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_A - 8 \times 2 + V_B \times 6 = 0$

$\therefore M_A = 20{,}8\ \text{kN.m}$

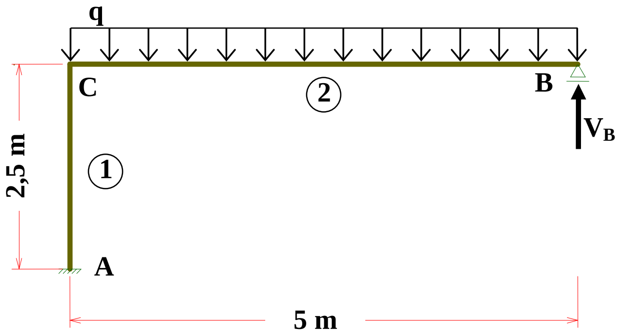
$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 0$

$\therefore V_A = 0{,}8\ \text{kN}$

Resposta: As reações são (de acordo com os sentidos dos vetores vistos no desenho acima):

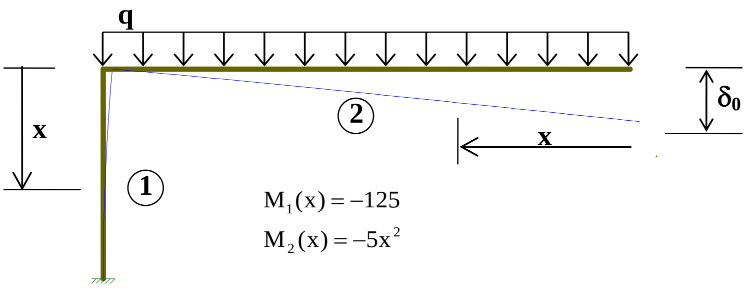
H_A= 8,00 kN
V_A= 0,80 kN
M_A= 20,80 kN.m
V_B= -0,80 kN

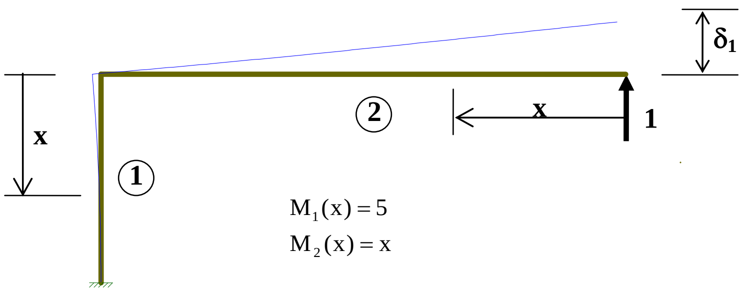
5 - Calcule a reação de apoio em B do pórtico hiperestático representado pela figura abaixo. Considere a barra 1 de inércia EI e a barra 2 de inércia 8EI, todas trabalhando fundamentalmente à flexão. Considere q = 10 kN/m.



Solução:

Equações de momentos fletores pra carregamento original e carregamento unitário:





$$\delta_0 = \int_0^{2,5} \frac{(-125)(5)}{EI}dx + \int_0^5 \frac{(-5x^2)(x)}{8EI}dx = \frac{-1660,16}{EI}$$

$$\delta_1 = \int_0^{2,5} \frac{(5)(5)}{EI}dx + \int_0^5 \frac{(x)(x)}{8EI}dx = \frac{67,7083}{EI}$$

Equação de compatibilidade: $\delta_0 + V_B\delta_1 = 0 \Rightarrow V_B = -\dfrac{\delta_0}{\delta_1} \Rightarrow V_B = -\dfrac{\dfrac{-1660,16}{EI}}{\dfrac{67,7083}{EI}}$

Resposta: $\boxed{V_B = 24,5192 \text{ kN}}$

6 - Através do Método das Forças, calcular as reações de apoio do pórtico da questão 1. Substitua o apoio B por uma mola (na direção vertical) com constante de mola $k = 8\times10^3$ kN/m, módulo de elasticidade longitudinal $E = 2\times10^8$ kN/m^2 e momento de inércia $I = 8\times10^{-5}$ m^4.

$$\delta_0 + V_B\delta_1 = -\frac{V_B}{k} \Rightarrow V_B = -\frac{\delta_0}{\frac{1}{k}+\delta_1}$$

Solução:

Deslocamento vertical de B devido ao carregamento original:

$$\delta_0 = \frac{-1660{,}16}{EI} = \frac{-1660{,}16}{2\times10^8\times8\times10^{-5}} = -0{,}10376$$

Deslocamento vertical do nó 4 devido ao carregamento unitário:

$$\delta_1 = \frac{67{,}7083}{EI} = \frac{67{,}7083}{2\times10^8\times8\times10^{-5}} = 0{,}0042318$$

Equação de compatibilidade: a soma dos deslocamentos deve ser o deslocamento do nó 4 com a mola.

$$\delta_0 + V_B\delta_1 = -\frac{V_B}{k} \Rightarrow V_B = -\frac{\delta_0}{\frac{1}{k}+\delta_1} = -\frac{-0{,}10376}{\frac{1}{8000}+0{,}0042318} = 23{,}8158 \text{ kN}$$

Resposta:

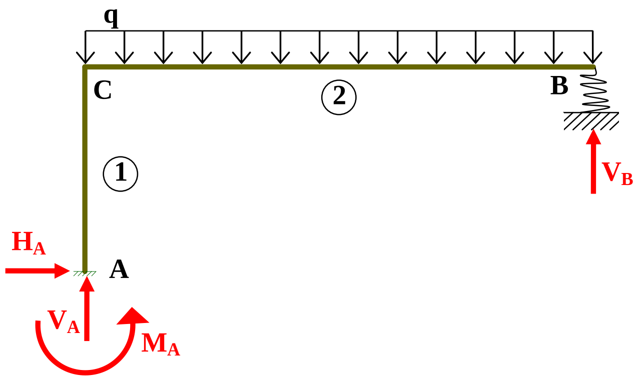
$\therefore V_B = 23{,}8158$ kN

Através das equações de equilíbrio estático temos:

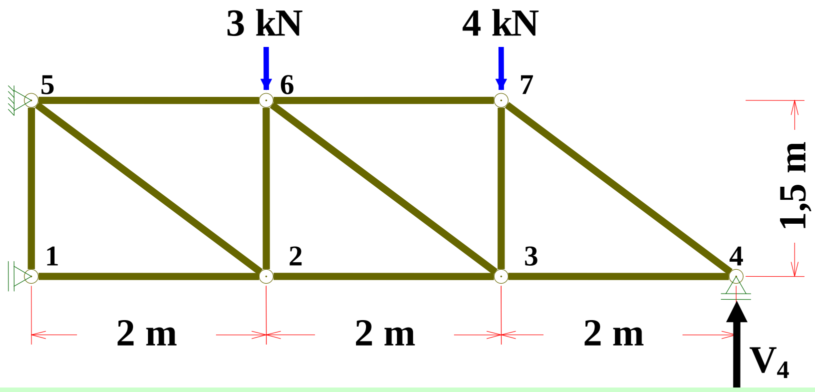
$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$ kN

$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_A = 5{,}921$ kN.m

$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A = 26{,}1842$ kN



7 - Através do Método das Forças, calcular a reação de apoio do nó 4 da treliça abaixo. Considere os nós como rótulas perfeitas. Todas as barras têm inércia EA. A redundante escolhida foi a reação vertical do nó 4. Note que os esforços normais nas barras foram fornecidos. As barras são identificadas pelos seus nós iniciais Ni e nós finais Nf. Na tabela abaixo: N0 são os esforços nas barras para os carregamentos originais e N1 são os esforços para uma força unitária para cima aplicada no nó 4.



Solução:

Ni	Nf	N0	N1	L	N0× N1×L
1	2	-14,66667	4,00000	2,0	-117,333
2	3	-5,33333	2,66667	2,0	-28,444
3	4	0,00000	1,33333	2,0	0,000
5	6	5,33333	-2,66667	2,0	-28,444
6	7	0,00000	-1,33333	2,0	0,000
1	5	0,00000	0,00000	1,5	0,000
2	6	-7,00000	1,00000	1,5	-10,500
3	7	-4,00000	1,00000	1,5	-6,000
2	5	11,66667	-1,66667	2,5	-48,611
3	6	6,66667	-1,66667	2,5	-27,778
4	7	0,00000	-1,66667	2,5	0,000
					-267,111

Deslocamento vertical do nó 4 devido ao carregamento original:

$$\delta_0 = \frac{\sum N_0 N_1 L}{EA} = \frac{-267{,}111}{EA}$$

Ni	Nf	N1	N1	L	N0× N1×L
1	2	4,00000	4,00000	2,0	32,000
2	3	2,66667	2,66667	2,0	14,222
3	4	1,33333	1,33333	2,0	3,556
5	6	-2,66667	-2,66667	2,0	14,222
6	7	-1,33333	-1,33333	2,0	3,556
1	5	0,00000	0,00000	1,5	0,000
2	6	1,00000	1,00000	1,5	1,500
3	7	1,00000	1,00000	1,5	1,500
2	5	-1,66667	-1,66667	2,5	6,944
3	6	-1,66667	-1,66667	2,5	6,944
4	7	-1,66667	-1,66667	2,5	6,944
					91,389

Deslocamento vertical do nó 4 devido ao carregamento unitário:

$$\delta_1 = \frac{\sum N_1 N_1 L}{EA} = \frac{91{,}389}{EA}$$

Equação de compatibilidade: a soma dos deslocamentos deve ser o deslocamento do nó 4 com o apoio, ou seja, igual a zero.

$$\delta_0 + V_4 \delta_1 = 0 \Rightarrow V_4 = -\frac{\delta_0}{\delta_1} = -\frac{\frac{-267{,}111}{EA}}{\frac{91{,}389}{EA}} = 2{,}923 \text{ kN}$$

Resposta: A reação de apoio do nó 4 é de **2,923 kN**.

8 - Através do Método das Forças, calcular as reações de apoio da treliça da questão 2. Retire o carregamento original e aplique um aumento uniforme de temperatura de 8ºC nas barras do banzo superior (barras 5-6 e 6-7), sendo que a área $A = 8\times10^{-4}$ m^2, módulo de elasticidade longitudinal $E = 2\times10^{8}$ kN/m^2 e coeficiente de dilatação térmica $\alpha=1,2\times10^{-5}$ ºC^{-1}.

$$\delta_0 = \sum \alpha\ L\ \Delta T\ \overline{N}$$

Solução:

Deslocamento vertical do nó 4 devido ao carregamento unitário:

$$\delta_1 = \frac{\sum N_1 N_1 L}{EA} = \frac{91,389}{EA} = \frac{91,389}{2\times10^{8}\times8\times10^{-4}} = 5,7118\times10^{-4}$$

Deslocamento vertical do nó 4 devido ao aumento uniforme de temperatura na barra 2-4:

Ni	Nf	α	L	ΔT	N1	α L ΔT N1
5	6	0,000012	2,0	8	-2,66667	-0,000512
6	7	0,000012	2,0	8	-1,33333	-0,000256
					Σ=	**-0,000768**

$$\delta_0 = \sum \alpha\ L\ \Delta T\ \overline{N} = -0,000768$$

Equação de compatibilidade: a soma dos deslocamentos deve ser o deslocamento do nó 4 com o apoio, ou seja, igual a zero.

$$\delta_0 + V_4\delta_1 = 0 \Rightarrow V_4 = -\frac{\delta_0}{\delta_1} = -\frac{-0,000768}{5,7118\times10^{-4}} = 1,3446\ \text{kN}$$

Resposta:

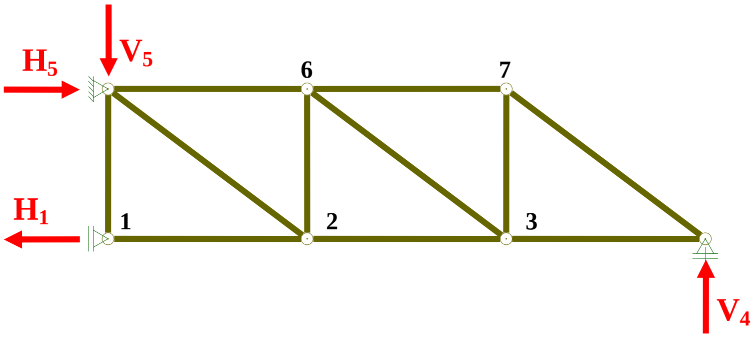
$$\therefore V_4 = 1,3446\ \text{kN}$$

Através das equações de equilíbrio estático temos:

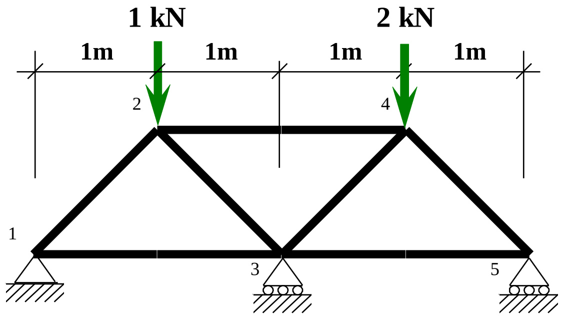
$$\sum M_{z(5)} = 0 \Rightarrow \ H_1 = 5,378\ \text{kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \ H_5 = 5,378\ \text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \ V_5 = 1,3446\ \text{kN}$$



9 - Através do Método das Forças, calcular a reação de apoio do nó 3 da treliça abaixo. Considere os nós como rótulas perfeitas. As diagonais têm inércia EA e os banzos têm inércia 4EA. A redundante escolhida foi a reação vertical do nó 3. Note que os esforços normais nas barras foram fornecidos. As barras são identificadas pelos seus nós iniciais Ni e nós finais Nf. Na tabela abaixo: N0 são os esforços nas barras para os carregamentos originais e N1 são os esforços para uma força unitária para cima aplicada no nó 3. A altura da viga é de 1 m (distância entre os banzos inferiores e superior).



Ni	Nf	N0	N1
1	2	-1,7678	0,7071
2	3	0,3536	-0,7071
3	4	-0,3536	-0,7071
4	5	-2,4749	0,7071
1	3	1,2500	-0,5000
3	5	1,7500	-0,5000
2	4	-1,5000	1,0000

Solução:

Deslocamento vertical do nó 3 devido ao carregamento original:

Ni	Nf	N0	N1	L	N0.N1.L	EA	N0.N1.L/EA
1	2	-1,7678	0,7071	1,41	-1,7678	1	-1,7678
2	3	0,3536	-0,7071	1,41	-0,3536	1	-0,3536
3	4	-0,3536	-0,7071	1,41	0,3536	1	0,3536
4	5	-2,4749	0,7071	1,41	-2,4749	1	-2,4749
1	3	1,2500	-0,5000	2,00	-1,2500	4	-0,3125
3	5	1,7500	-0,5000	2,00	-1,7500	4	-0,4375
2	4	-1,5000	1,0000	2,00	-3,0000	4	-0,7500
						Σ=	-5,7427

$$\delta_0 = \frac{\sum N_0 N_1 L}{EA} = \frac{-5{,}7427}{EA}$$

Deslocamento vertical do nó 3 devido ao carregamento unitário:

Ni	Nf	N1	N1	L	N1.N1.L	EA	N1.N1.L/EA
1	2	0,7071	0,7071	1,41	0,7071	1	0,7071
2	3	-0,7071	-0,7071	1,41	0,7071	1	0,7071
3	4	-0,7071	-0,7071	1,41	0,7071	1	0,7071
4	5	0,7071	0,7071	1,41	0,7071	1	0,7071
1	3	-0,5000	-0,5000	2,00	0,5000	4	0,1250
3	5	-0,5000	-0,5000	2,00	0,5000	4	0,1250
2	4	1,0000	1,0000	2,00	2,0000	4	0,5000
						Σ=	3,5785

$$\delta_1 = \frac{\sum N_1 N_1 L}{EA} = \frac{3{,}5785}{EA}$$

Equação de compatibilidade: a soma dos deslocamentos deve ser o deslocamento do nó 3 com o apoio, ou seja, igual a zero.

$$\delta_0 + V_3\delta_1 = 0 \Rightarrow V_3 = -\frac{\delta_0}{\delta_1} = -\frac{\frac{-5{,}7427}{EA}}{\frac{3{,}5785}{EA}} = 1{,}605\ \text{kN}$$

Resposta: A reação de apoio do nó 3 é de **1,605 kN**.

10 - Através do Método das Forças, calcular as reações de apoio da treliça da questão 2 em apenas um dos dois casos seguintes:

a) retire o carregamento original e aplique um aumento uniforme de temperatura de 20ºC na barra 2-4, sendo que A = 0,02 m^2, E = 2×10^8 kN/m^2 e α=10^{-5} ºC^{-1}.

Solução:

Deslocamento vertical do nó 3 devido ao carregamento unitário:

$$\delta_1 = \frac{\sum N_1 N_1 L}{EA} = \frac{3{,}5785}{EA} = \frac{3{,}5785}{2\times 10^8 \times 0{,}02} = 8{,}95\times 10^{-7}$$

Deslocamento vertical do nó 3 devido ao aumento uniforme de temperatura na barra 2-4:

$$\delta_0 = \alpha\ L\ \Delta T\ \overline{N}_{2-4} = 10^{-5}\times 2{,}0\times 20\times 1{,}0 = 4\times 10^{-4}\,m$$

Equação de compatibilidade: a soma dos deslocamentos deve ser o deslocamento do nó 3 com o apoio, ou seja, igual a zero.

$$\delta_0 + V_3\delta_1 = 0 \Rightarrow V_3 = -\frac{\delta_0}{\delta_1} = -\frac{4\times 10^{-4}}{8{,}95\times 10^{-7}} = -447{,}1\,kN$$

Resposta:

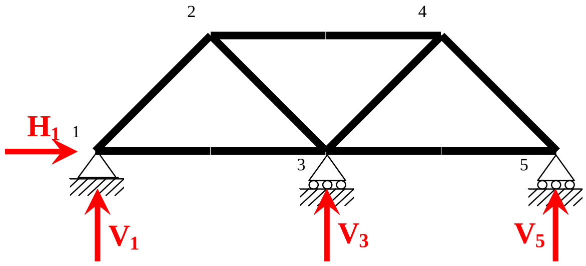
$$\therefore V_3 = -447{,}1\,kN$$

Através das equações de equilíbrio estático temos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow\ H_1 = 0\ kN$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow\ V_1 = 223{,}6\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow\ V_5 = 223{,}6\ kN$$



b) substitua o apoio do nó 3 por uma mola com k = 2000 kN/m, A = 0,02 m^2, E = 2×10^8 kN/m^2.

Solução:

Deslocamento vertical do nó 3 devido ao carregamento original:

$$\delta_0 = \frac{\sum N_0 N_1 L}{EA} = \frac{-5{,}7427}{EA} = \frac{-5{,}7427}{2\times 10^8 \times 0{,}02} = -1{,}436\times 10^{-6}\,m$$

Deslocamento vertical do nó 3 devido ao carregamento unitário:

$$\delta_1 = \frac{\sum N_1 N_1 L}{EA} = \frac{3{,}5785}{EA} = \frac{3{,}5785}{2\times 10^8 \times 0{,}02} = 8{,}946\times 10^{-7}$$

Equação de compatibilidade: a soma dos deslocamentos deve ser o deslocamento do nó 3 com a mola.

$$\delta_0 + V_3\delta_1 = -\frac{V_3}{k} \Rightarrow V_3 = -\frac{\delta_0}{\frac{1}{k}+\delta_1} = -\frac{-1{,}436\times 10^{-6}}{\frac{1}{2000}+8{,}95\times 10^{-7}} = 0{,}00286\,kN$$

Resposta:

$$\therefore V_3 = 0{,}002866\,kN$$

Através das equações de equilíbrio estático temos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow\ H_1 = 0\ kN$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow\ V_1 = 1{,}248567\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow\ V_5 = 1{,}748567\ kN$$