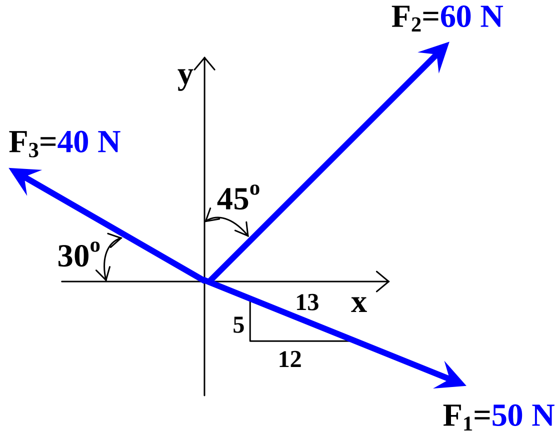
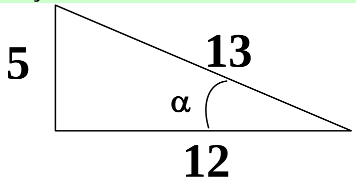
1- Determine o módulo e <u>represente graficamente</u> a resultante das três forças vistas na figura abaixo.



Solução:



$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{12}{13}$$

$$\vec{F}_1 = +50\cos(\alpha)\vec{i} - 50\,\mathrm{sen}(\alpha)\vec{j} \qquad \vec{F}_1 = +46{,}1538\vec{i} - 19{,}2308\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = +60\,\mathrm{sen}(45^o)\vec{i} + 60\cos(45^o)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_2 = +42{,}4264\vec{i} + 42{,}4264\vec{j}$$

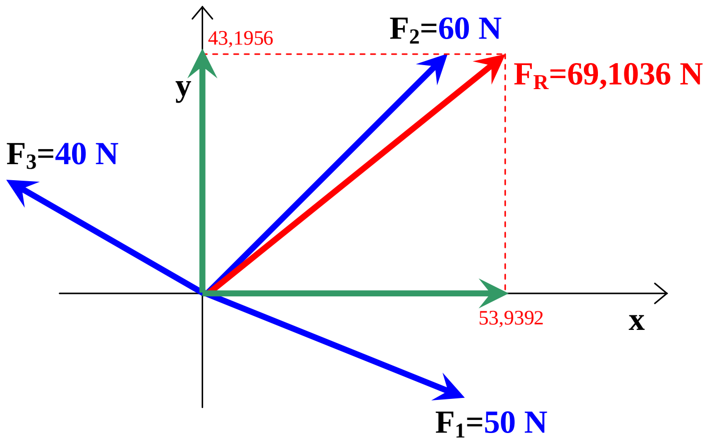
$$\vec{F}_3 = -40\cos(30^o)\vec{i} + 40\,\mathrm{sen}(30^o)\vec{j} \qquad \vec{F}_3 = -34{,}641\vec{i} + 20{,}000\vec{j}$$

$$\Rightarrow$$

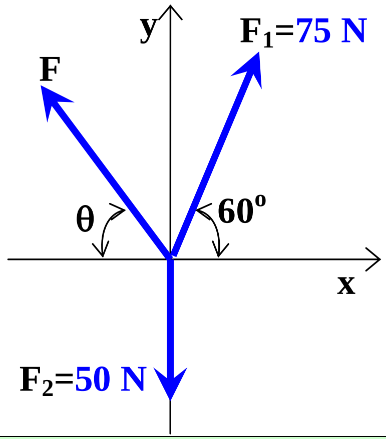
$$\vec{F}_R = (46{,}1538 + 42{,}4264 - 34{,}641)\vec{i} + (-19{,}2308 + 42{,}4264 + 20{,}000)\vec{j}$$

$$\therefore \vec{F}_R = 53{,}9392\vec{i} + 43{,}1956\vec{j}$$

$$\left\|\vec{F}_R\right\| = \sqrt{53{,}9392^2 + 43{,}1956^2} = 69{,}1036 \text{ N}$$



2- Se as forças F_1 e F_2 são conhecidas, determine a orientação θ e o módulo da força F de modo que o sistema de forças coplanares se encontre em equilíbrio estático.



Solução:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F\times\cos(\theta) + 75\times\cos(60^o) = 0 \Rightarrow F = \frac{75\times\cos(60^o)}{\cos(\theta)} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F\times \mathrm{sen}(\theta) + 75\times \mathrm{sen}(60^o) - 50 = 0 \qquad (2)$$

(1) em (2)

$$\frac{75\times\cos(60^o)}{\cos(\theta)}\times \mathrm{sen}(\theta) + 75\times \mathrm{sen}(60^o) = 50$$

$$\Rightarrow$$

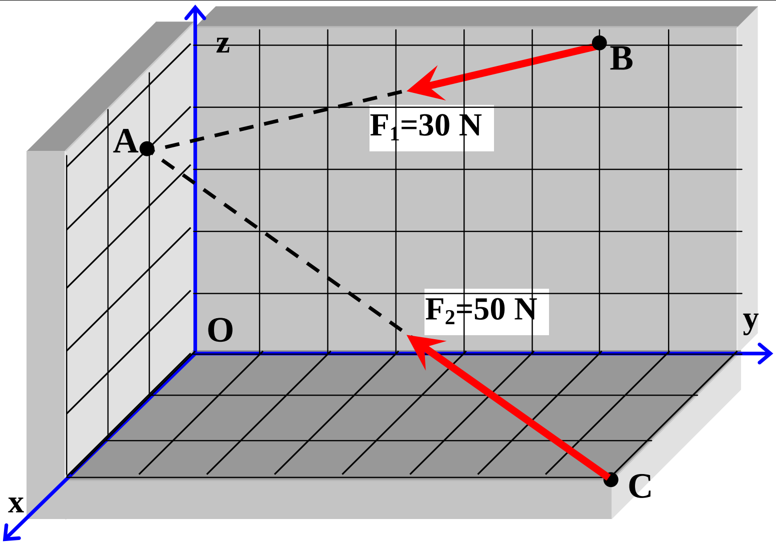
$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{50 - 75\times \mathrm{sen}(60^o)}{75\times\cos(60^o)} = -0{,}398717$$

$$\therefore \theta = -21{,}738^o$$

$$F = \frac{75\times\cos(60^o)}{\cos(-21{,}738^o)}$$

$$\therefore F = 40{,}3709\ \mathrm{N}$$

3- Encontre o módulo e os ângulos diretores da força resultante entre F_1 e F_2.
Considere cada quadriculado 1 cm x 1 cm



Solução:

As coordenadas dos pontos são:

A(1, 0, 4)

B(0, 6, 5)

C(3, 8, 0)

$$\vec{u}_{BA} = \frac{\vec{r}_{BA}}{\|\vec{r}_{BA}\|} = \frac{(1-0)\vec{i} + (0-6)\vec{j} + (4-5)\vec{k}}{\sqrt{1^2+6^2+1^2}} = 0{,}162221\,\vec{i} - 0{,}973329\,\vec{j} - 0{,}162221\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_{CA} = \frac{\vec{r}_{CA}}{\|\vec{r}_{CA}\|} = \frac{(1-3)\vec{i} + (0-8)\vec{j} + (4-0)\vec{k}}{\sqrt{2^2+8^2+4^2}} = -0{,}218218\,\vec{i} - 0{,}872872\,\vec{j} + 0{,}436436\,\vec{k}$$

$$\vec{F}_1 = \|\vec{F}_1\|.\vec{u}_{BA} = 30.\{0{,}162221\,\vec{i} - 0{,}973329\,\vec{j} - 0{,}162221\,\vec{k}\} = 4{,}86664\,\vec{i} - 29{,}1999\,\vec{j} - 4{,}86664\,\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = \|\vec{F}_2\|.\vec{u}_{CA} = 50.\{-0{,}218218\,\vec{i} - 0{,}872872\,\vec{j} + 0{,}436436\,\vec{k}\} = -10{,}9109\,\vec{i} - 43{,}6436\,\vec{j} + 21{,}8218\,\vec{k}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \{4{,}86664\,\vec{i} - 29{,}1999\,\vec{j} - 4{,}86664\,\vec{k}\} + \{-10{,}9109\,\vec{i} - 43{,}6436\,\vec{j} + 21{,}8218\,\vec{k}\}$$

$\therefore$

$$\vec{F}_R = -6{,}04425\,\vec{i} - 72{,}8434\,\vec{j} + 16{,}9551\,\vec{k}$$

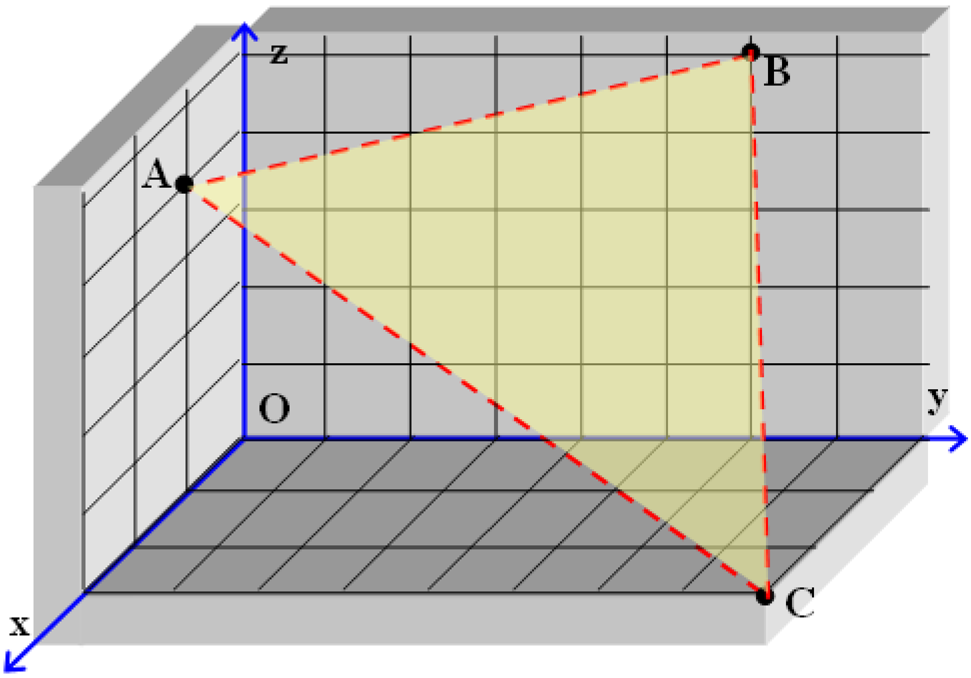
$$\|\vec{F}_R\| = \sqrt{6{,}04425^2 + 72{,}8434^2 + 16{,}9551^2} = 75{,}0345\text{ N}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{F_{Rx}}{\|\vec{F}_R\|}\right) = \arccos\left(\frac{-6{,}04425}{75{,}0345}\right) = 94{,}6^\circ$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{F_{Ry}}{\|\vec{F}_R\|}\right) = \arccos\left(\frac{-72{,}8434}{75{,}0345}\right) = 166{,}1^\circ$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{F_{Rz}}{\|\vec{F}_R\|}\right) = \arccos\left(\frac{16{,}9551}{75{,}0345}\right) = 76{,}9^\circ$$

4- Encontre os ângulos internos do triângulo formado pelos pontos A, B e C vistos na figura ao lado.



Solução:

As coordenadas dos pontos são:

A(1, 0, 4)

B(0, 6, 5)

C(3, 8, 0)

$$\vec{r}_{AB} = (0-1)\vec{i} + (6-0)\vec{j} + (5-4)\vec{k} = -\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} \quad \Rightarrow \|\vec{r}_{AB}\| = 6{,}16441$$

$$\vec{r}_{AC} = (3-1)\vec{i} + (8-0)\vec{j} + (0-4)\vec{k} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} \quad \Rightarrow \|\vec{r}_{AC}\| = 9{,}16515$$

$$\vec{r}_{AB}.\vec{r}_{AC} = (-1)\times 2 + 6\times 8 + 1\times(-4) = 42$$

$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{\vec{r}_{AB}.\vec{r}_{AC}}{\|\vec{r}_{AB}\|\times\|\vec{r}_{AC}\|}\right) = \text{arc cos}\left(\frac{42}{6{,}16441\times 9{,}16515}\right) = 41{,}98^o$$

$$\vec{r}_{BA} = \vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k} \quad \Rightarrow \|\vec{r}_{BA}\| = 6{,}16441$$

$$\vec{r}_{BC} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} \quad \Rightarrow \|\vec{r}_{BC}\| = 6{,}16441$$

$$\vec{r}_{BA}.\vec{r}_{BC} = -4$$

$$\beta = \text{arc cos}\left(\frac{\vec{r}_{BA}.\vec{r}_{BC}}{\|\vec{r}_{BA}\|\times\|\vec{r}_{BC}\|}\right) = 96{,}04^o$$

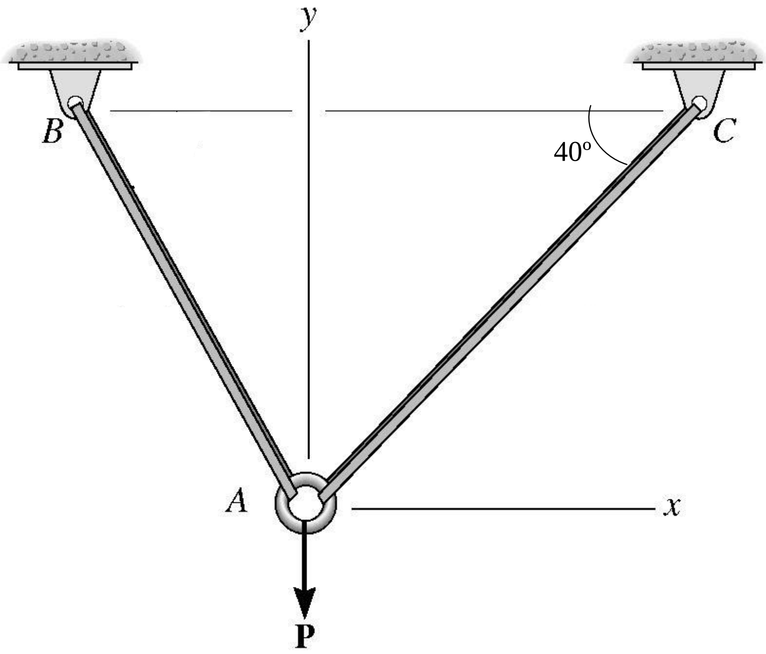
$$\vec{r}_{CB} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} \quad \Rightarrow \|\vec{r}_{CB}\| = 6{,}16441$$

$$\vec{r}_{CA} = -2\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k} \quad \Rightarrow \|\vec{r}_{CA}\| = 9{,}16515$$

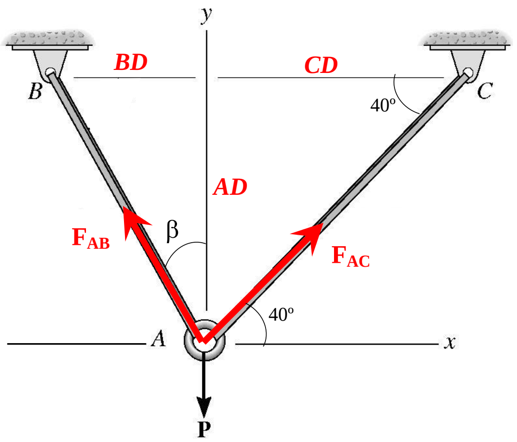
$$\vec{r}_{CB}.\vec{r}_{CA} = 42$$

$$\gamma = \text{arc cos}\left(\frac{\vec{r}_{CB}.\vec{r}_{CA}}{\|\vec{r}_{CB}\|\times\|\vec{r}_{CA}\|}\right) = 41{,}98^o$$

5- Duas barras são usadas para suportar uma carga P=5 kN. O comprimento de AB é 75 cm, o de AC é 100 cm. Encontre os esforços normais nas barras AB e AC para o perfeito equilíbrio estático do nó A, ou seja, calcule os esforços nas barras AB e AC para que a resultante do sistema de forças ao redor de A seja igual a zero.



Solução:



Para encontrar o lado AD, temos que:

$$\mathrm{sen}(40^o) = \frac{AD}{100} \Rightarrow$$

$$AD = 100 \times \mathrm{sen}(40^o) = 64{,}2788 \text{ cm}$$

o ângulo β:

$$\cos(\beta) = \frac{AD}{75} \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{64{,}2788}{75}$$

$$\beta = 31{,}013^o = 0{,}541279 \text{ rad}$$

Equações de equilíbrio onde F_{AB} e F_{AC} são as forças nas hastes AB e AC, respectivamente.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \; -F_{AB} \times \mathrm{sen}(\beta) + F_{AC} \times \cos(40^o) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \; F_{AB} \times \cos(\beta) + F_{AC} \times \mathrm{sen}(40^o) - P = 0 \qquad (2)$$

Assim temos:

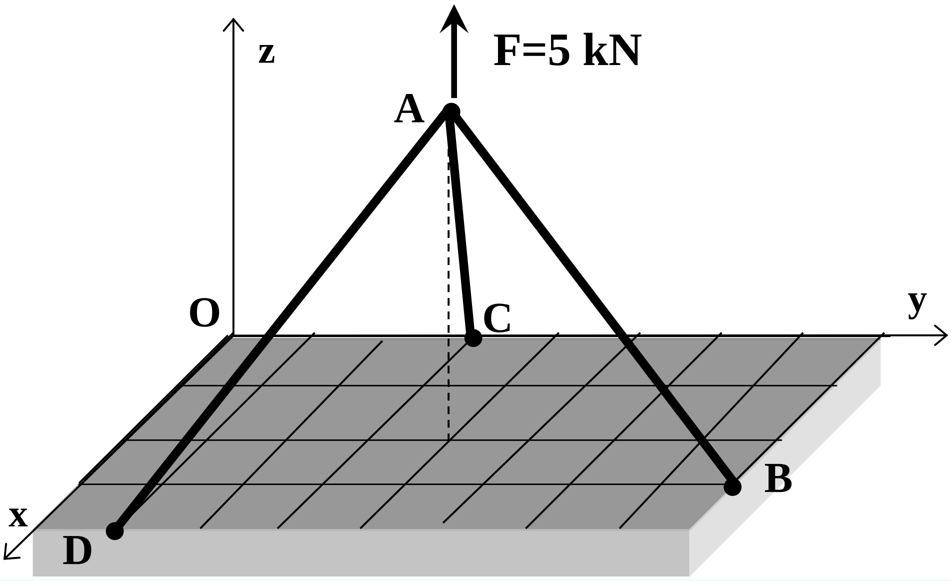
$$F_{AC} = F_{AB} \times \frac{\mathrm{sen}(\beta)}{\cos(40^o)} \qquad (1)$$

$$F_{AB} \times \cos(\beta) + F_{AB} \times \frac{\mathrm{sen}(\beta)}{\cos(40^o)} \times \mathrm{sen}(40^o) = 5 \qquad (2)$$

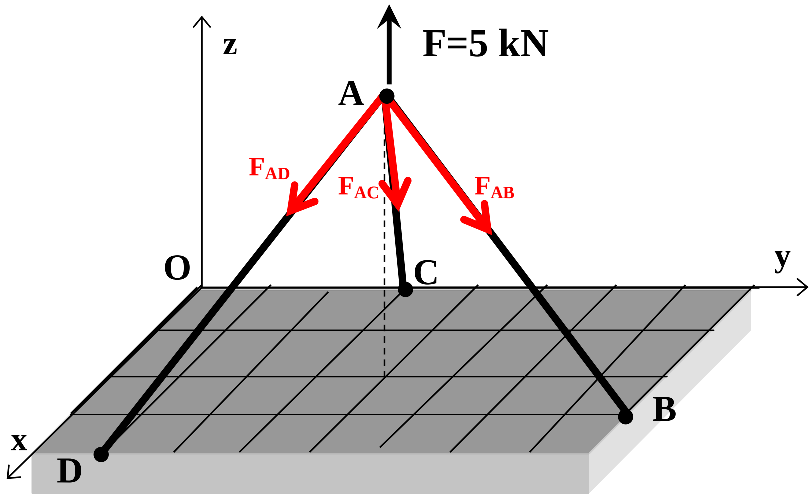
$$F_{AB} = \frac{5}{\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\beta)} = 3{,}87783 \text{ kN} \quad \Rightarrow F_{AC} = 3{,}87783 \times \frac{\mathrm{sen}(\beta)}{\cos(40^o)} = 2{,}60818 \text{ kN}$$

Resposta: As forças nas barras AB e AC são: **3,878 kN** e **2,608 kN**, respectivamente.

6- Determine a força em cada barra necessária para suportar a força **F** = 5 kN. O ponto **A** está a 4 m acima do plano **xy**. Considere cada quadriculado 1 m × 1 m.



Solução:



As coordenadas dos pontos são:

```
A(2, 4, 4)
B(3, 8, 0)
C(0, 3, 0)
D(4, 1, 0)
```

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB}\frac{\vec{r}_{AB}}{\|\vec{r}_{AB}\|} = \frac{(3-2)\vec{i}+(8-4)\vec{j}+(0-4)\vec{k}}{\sqrt{1^2+4^2+4^2}} = \{0{,}174078\ \vec{i}+0{,}696311\ \vec{j}-0{,}696311\ \vec{k}\}F_{AB}$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC}\frac{\vec{r}_{AC}}{\|\vec{r}_{AC}\|} = \frac{(0-2)\vec{i}+(3-4)\vec{j}+(0-4)\vec{k}}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}} = \{-0{,}436436\ \vec{i}-0{,}218218\ \vec{j}-0{,}872872\ \vec{k}\}F_{AC}$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD}\frac{\vec{r}_{AD}}{\|\vec{r}_{AD}\|} = \frac{(4-2)\vec{i}+(1-4)\vec{j}+(0-4)\vec{k}}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \{0{,}371391\ \vec{i}-0{,}557086\ \vec{j}-0{,}742781\ \vec{k}\}F_{AD}$$

O equilíbrio é conseguido quando:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \Rightarrow F_{AB}0{,}174078 - F_{AC}0{,}436436 + F_{AD}0{,}371391 = 0 \\
\sum F_y &= 0 \Rightarrow F_{AB}0{,}696311 - F_{AC}0{,}218218 - F_{AD}0{,}557086 = 0 \\
\sum F_z &= 0 \Rightarrow -F_{AB}0{,}696311 - F_{AC}0{,}872872 - F_{AD}0{,}742781 + 5 = 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
F_{AB} &= 2{,}20945\ \text{kN} \\
F_{AC} &= 2{,}42348\ \text{kN} \\
F_{AD} &= 1{,}81232\ \text{kN}
\end{aligned}$$

Resposta: As forças F_{AB}, F_{AC} e F_{AD} têm módulos 2,20945 kN, 2,42348 kN e 1,81232 kN, respectivamente.