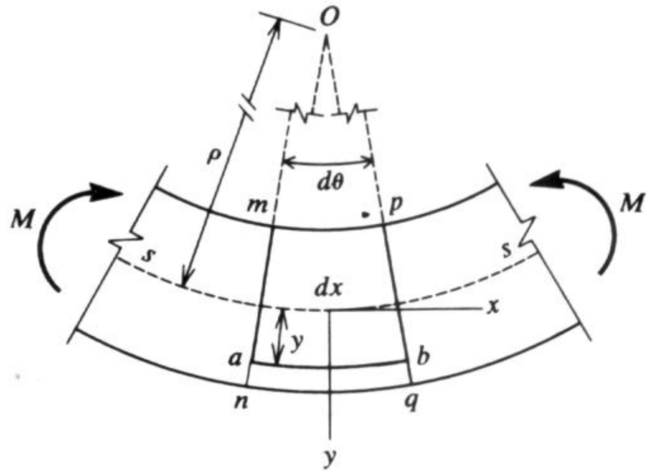
06 – Flexão - Tensões em vigas

Considere um trecho de viga sujeita à flexão pura. Depois da deformação, os planos de duas seções transversais adjacentes, mn e pq, encontram-se no ponto O, que é o centro de curvatura do eixo longitudinal da viga. O ângulo desses planos é indicado por $d\theta$ e o raio de curvatura, por ρ



Da geometria da figura, vem

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \qquad (6\text{-}1)$$

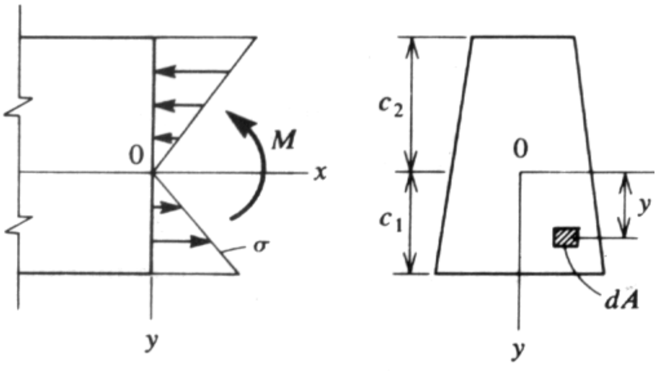
onde κ é a curvatura, igual ao inverso do raio de curvatura, e dx, o comprimento do elemento entre as duas seções transversais, mn e pq.

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho} = \kappa y \qquad (6\text{-}2)$$

Esta equação mostra que as deformações longitudinais, ε_x, são diretamente proporcionais à curvatura e à distância y da superfície neutra.

Quando a viga é de material elástico, com diagrama tensão-deformação linear (material que segue a Lei de Hooke), tem-se $\sigma = E\varepsilon$ e, portanto, as tensões normais na viga são:

$$\sigma_x = \kappa E y \qquad (6\text{-}5)$$



(a) (b)

Seja dA uma área elementar na seção transversal e distante y do eixo neutro. A força elementar que atua sobre esta área é $\sigma_x dA$. Como não há força normal resultante atuando na seção, a integral de $\sigma_x dA$ sobre a área total da seção transversal deve anular-se, o que dá:

$$\int \sigma_x \, dA = \int \kappa E y \, dA$$

Como a curvatura κ e o módulo de elasticidade E são constantes, vem

$$\int y \, dA = 0 \qquad (6\text{-}6)$$

O momento da força elementar $\sigma_x dA$, em relação ao eixo neutro, é $\sigma_x y dA$. A integral de todos esses momentos elementares sobre a área da seção transversal deve ser igual ao momento fletor M; assim:

$$M = \int \sigma_x y \, dA = \kappa E \int y^2 \, dA = \kappa E I \qquad (5\text{-}7)$$

onde:

$$I = \int y^2 \, dA \qquad (6\text{-}8)$$

é o momento de inércia da área da seção transversal, em relação ao eixo z, que é o eixo neutro

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad (6\text{-}9)$$

Combinando as equações 6-5 e 6-9, obtém-se a equação que dá as tensões normais da viga:

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \qquad (6\text{-}10)$$

Nesta equação, M é positivo quando produz compressão no viga e y é positivo quando o sentido é para baixo. Designa os afastamentos das fibras extremas por c_1 e c_2, para tração e compressão, respectivamente, e supondo M positivo, a equação 6-10 permite escrever:

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{Mc_1}{I} = \frac{M}{Z_1}; \qquad (6\text{-}11a)$$

$$(\sigma_x)_{min} = -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{M}{Z_2} \qquad (6\text{-}11b)$$

onde Z_1 e Z_2 são módulos de resistência, ou módulos da seção, ou módulos de resistência à flexão da área da seção transversal. Se a seção for simétrica em relação ao eixo Z, $c_1 = c_2 = c$

$$(\sigma_x)_{max} = -(\sigma_x)_{min} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{Z} \qquad (6\text{-}12)$$

onde o módulo de resistência à flexão é

$$Z = \frac{I}{c} \qquad (6\text{-}13)$$

Para uma seção transversal retangular de largura b e altura h, o momento de inércia e o módulo à flexão são:

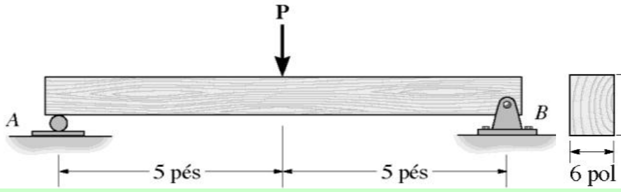
$$I = \frac{bh^3}{12}; \quad Z = \frac{bh^2}{6} \qquad (6\text{-}14)$$

Para uma seção transversal circular de diâmetro d, o momento de inércia e o módulo à flexão são:

$$I = \frac{\pi d^4}{64}; \quad Z = \frac{\pi d^3}{32} \qquad (6\text{-}15)$$

Exemplos

1) A viga de madeira tem seção transversal retangular. Supondo que sua largura seja 6 pol, determinar a altura h, de modo que ela atinja sua tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 1{,}50$ ksi. Suponha que a força P seja igual a 3200 lbf.



Solução:

A tensão normal numa seção transversal de uma viga é:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I} c$$

I= momento de inércia da seção (no caso, um retângulo). O centróide, c, da seção situa-se no centro da altura. Na questão, o momento máximo, M_{max}, ocorre logo abaixo da carga P. Com os dados fornecidos na questão:

$$M_{max} = \frac{P}{2} \times 5 \text{ pés} = \frac{P}{2} \times 5 \times 12 \text{ pol} = 30\text{ P}$$

$$I = \frac{6 \times h^3}{12} = \frac{h^3}{2}$$

$$c = \frac{h}{2}$$

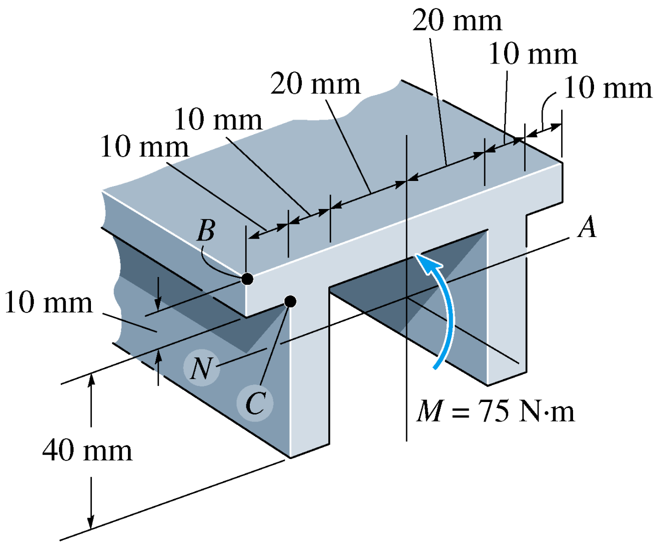
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I} c \quad \Rightarrow \quad \sigma_{adm} = \frac{M_{max}}{I} c$$

Assim: $\Rightarrow 1500 = \dfrac{30\text{ P}}{\dfrac{h^3}{2}} \times \dfrac{h}{2} \Rightarrow P = 50\, h^2$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{P}{50}} = \sqrt{\frac{3200}{50}} = 8 \text{ pol}$$

Resposta: A altura h deve ser de 8 pol.

6.48 A peça de máquina de alumínio está sujeita a um momento M = 75 N.m. Determinar as tensões normais de flexão máximas de tração e de compressão na peça.



Solução:

Centro de gravidade da seção transversal tomando como base inferior como referência:

$$\bar{y} = \frac{(10 \times 40) \times 20 + (10 \times 40) \times 20 + (80 \times 10) \times 45}{(10 \times 40) + (10 \times 40) + (80 \times 10)}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 32{,}5 \text{ mm}$$

$$I_x = \left[\frac{10 \times 40^3}{12} + (10 \times 40) \times 12{,}5^2 \right] \times 2$$

$$+ \left[\frac{80 \times 10^3}{12} + (80 \times 10) \times 12{,}5^2 \right] \Rightarrow$$

$$\therefore I_x = \frac{1090000}{3} \text{ mm}^4$$

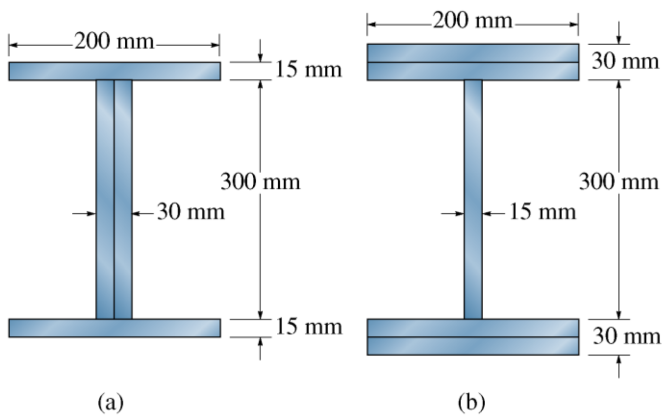
$$\sigma_{max}^{-} = \frac{M_{max}}{I_x} y_B = -\frac{75000}{\dfrac{1090000}{3}} \times 17{,}5 = -3{,}612 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max}^{+} = \frac{M_{max}}{I_x} y_{base} = \frac{75000}{\dfrac{1090000}{3}} \times 32{,}5 = +6{,}709 \text{ MPa}$$

Resposta: As tensões normais de flexão máximas são: **3,612 MPa** de compressão e **6,709 MPa** de tração.

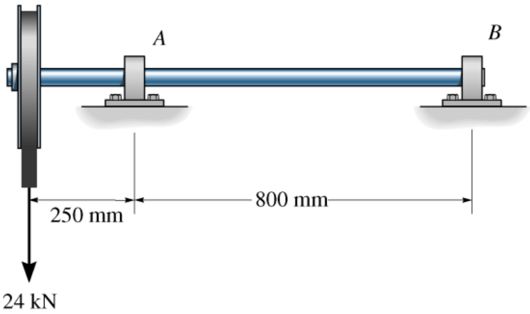
Exercício

6.42 Foram propostas duas soluções para o projeto de uma viga. Determinar qual delas suportará um momento M = 150 kN.m com a menor tensão normal de flexão. Qual é essa menor tensão? Com que porcentagem ele é mais eficiente?

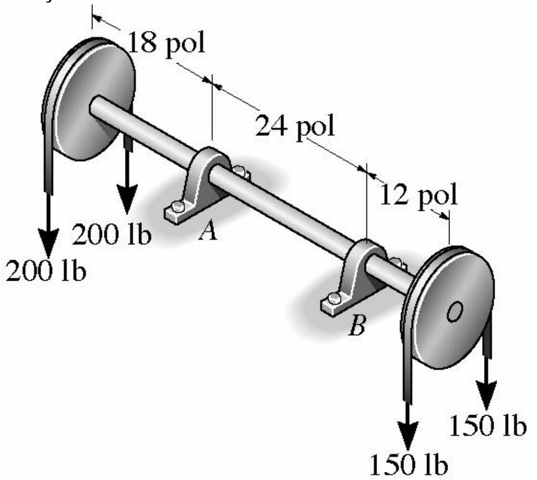


Resposta: A menor tensão normal é do perfil b e é de **74,7 MPa** com eficiência de **53%.**

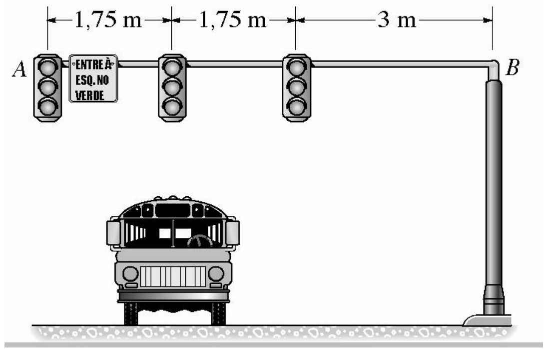
6.1 Desenhar os diagramas de força cortante e momento para o eixo. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre o eixo.



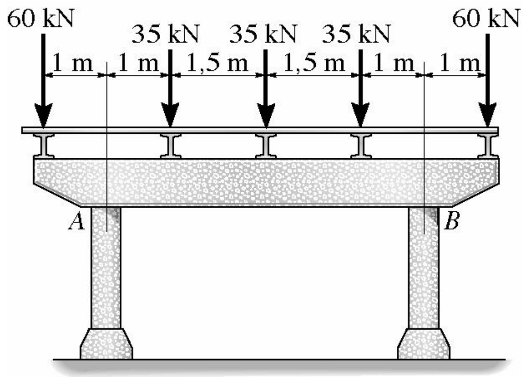
6.2 O eixo está submetido às cargas provocadas pelas correias que passam sobre as duas polias. Desenhar os diagramas de força cortante e momento. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre o eixo.



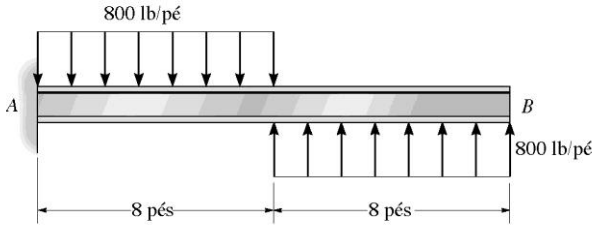
6.3 Os três semáforos têm, cada um, massa de 10 kg e o tubo em balanço AB tem massa de 1,5 kg/m. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para o tubo. Desprezar a massa do farol.



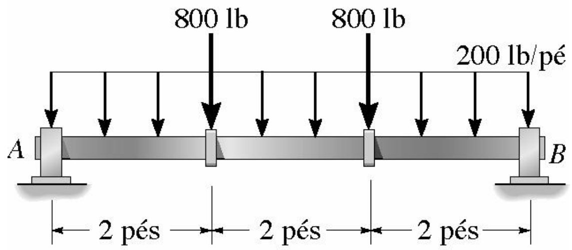
6.5 O encontro de concreto armado é usado para apoiar as longarinas da plataforma de uma ponte. Desenhar seus diagramas de força cortante e momento quando ele é submetido às cargas da longarina mostradas. Supor que as colunas A e B exercem apenas reações verticais sobre o encontro.



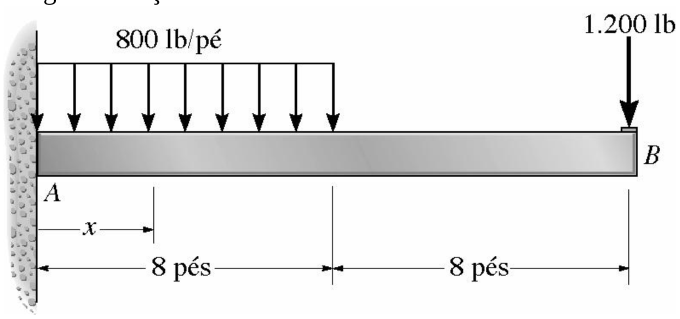
6.14 Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga.



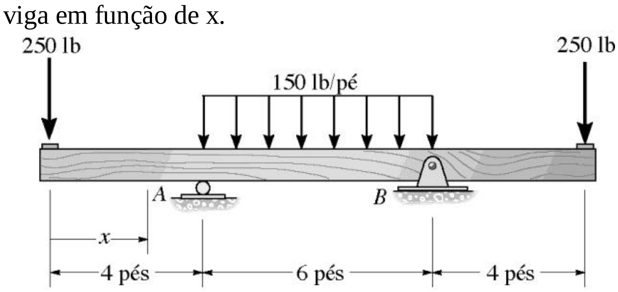
6.17 Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre ela.



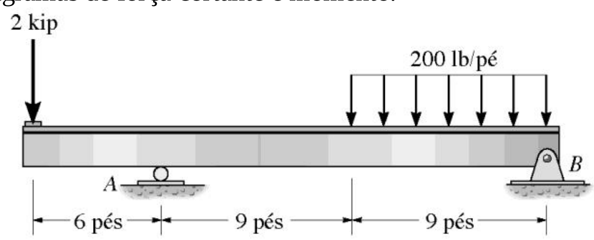
6.21 Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga e determinar a força cortante e o momento em toda a viga em função de x.



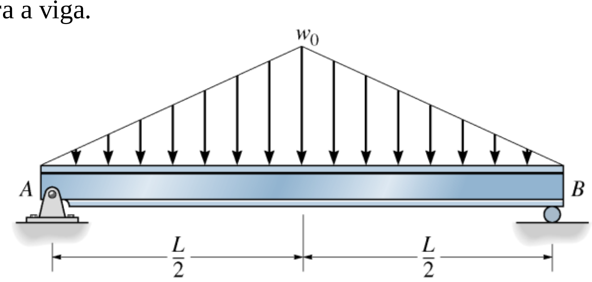
6.22 Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga e determinar a força cortante e o momento em toda a viga em função de x.



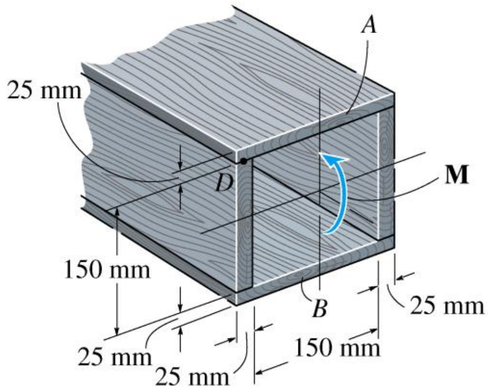
6.29 A viga T está sujeita à carga mostrada. Desenhar os diagramas de força cortante e momento.



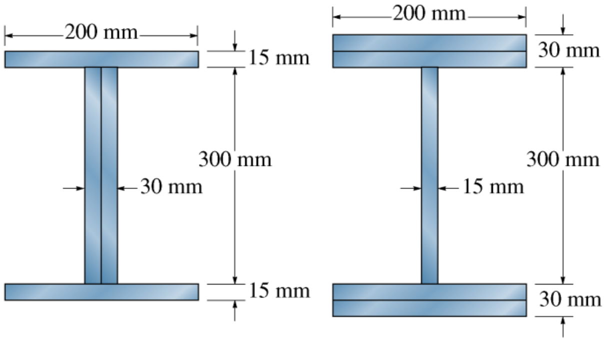
6.30 Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga.



6.39 Determinar o momento M que deve ser aplicado à viga a fim de criar um esforço de compressão de $\sigma_D = 30$ MPa no ponto D. Desenhar também a distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal e calcular a tensão máxima desenvolvida na viga.

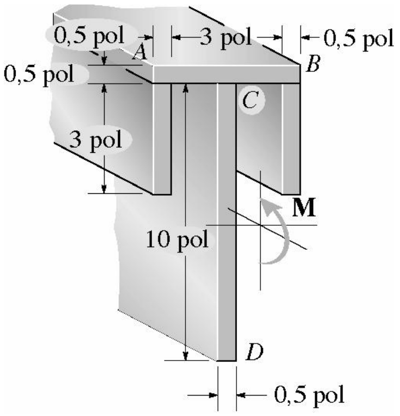


6.42 Foram propostas duas soluções para o projeto de uma viga. Determinar qual delas suportará um momento M = 150 kN.m com a menor tensão normal de flexão. Qual é essa tensão? Com que porcentagem ele é mais eficiente?

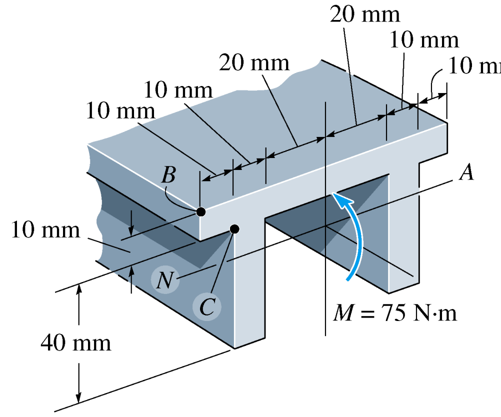


(a) (b)

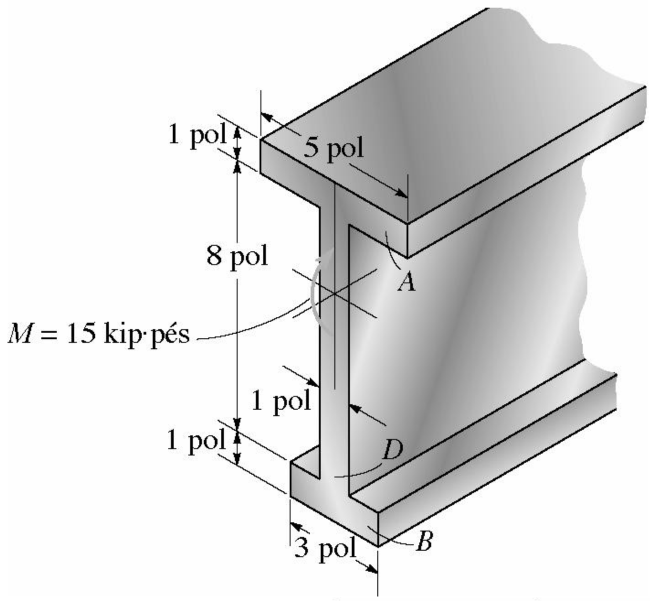
6.45 Determinar a força resultante que as tensões de flexão produzem na chapa superior horizontal do flange AB da viga, supondo que M = 4 kip.pés.



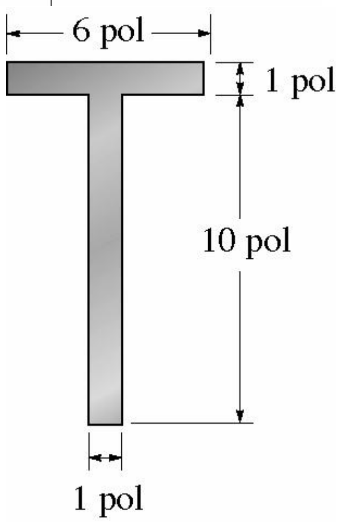
6.47 A peça de máquina de alumínio está sujeita a um momento M = 75 N.m. Determinar a tensão normal de flexão nos pontos B e C da seção transversal. Desenhar os resultados em um elemento de volume localizado em cada um desses pontos.



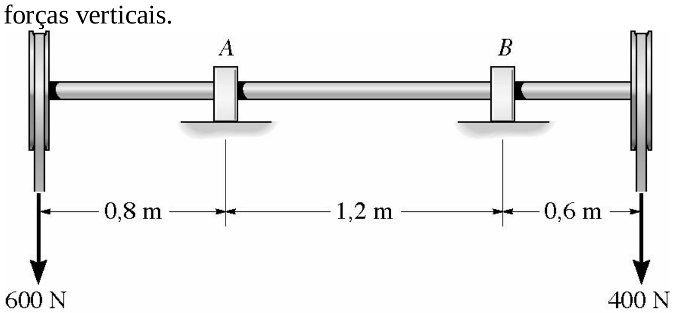
6.55 A viga está sujeita a um momento de 15 kip.pés. Determinar a força resultante que a tensão produz nos flanges superior A e inferior B. Calcular também a tensão máxima desenvolvida na viga.



6.68- A seção transversal de uma viga está sujeita a um momento de 12 kip . pés. Determinar a força resultante que a tensão produz na mesa (6 pol × 1 pol). Calcular também a tensão máxima desenvolvida nesta seção transversal da viga



6.71 Determinar a tensão normal de flexão máxima absoluta no eixo de 30 mm de diâmetro que está submetido a forças concentradas. As buchas nos apoios A e B suportam apenas forças verticais.



6.73 A viga tem seção transversal retangular como mostrado. Determinar a maior carga P que pode ser suportada em suas extremidades em balanço, de modo que a tensão normal de flexão na viga não exceda σ_{adm} = 10MPa.