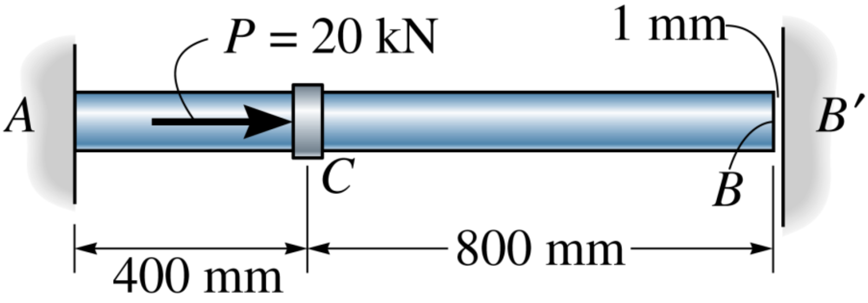
Ex. 4-5 A barra de aço mostrada na figura ao lado tem um diâmetro de 5 mm. Ela é rigidamente fixada à parede A e, antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede B' e a extremidade da barra. Determine as reações em A e B' para uma força axial P=20 kN aplicada à barras conforme indicado. Despreze as dimensões do colar. Faça $E_{aço}$ = 200 GPa.



Solução:

Por equilíbrio: $F_A + F_B = 20$ kN (1)

Pela restrição de deslocamento total de A até C: $\delta_{AC} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i} = 1\,\text{mm}$ (2)

Dados:

$E_{aço}$ = 200 GPa = 200 kN/mm^2
d = 1,5 mm
L_{AC} = 400 mm
L_{CB} = 800 mm

Esforços normais:

$N_{AC} = F_A$
$N_{CB} = F_A - 20$

Áreas das seções transversais:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(5\text{ mm})^2}{4} = 19{,}63495\text{ mm}^2$$

$$\delta_{AC} = \frac{N_{AC}L_{AC}}{E_{aço}A} + \frac{N_{CB}L_{CB}}{E_{aço}A} = 1\text{ mm} \Rightarrow \delta_{AC} = \frac{F_A \times 400}{200 \times 19{,}63495} + \frac{(F_A - 20) \times 800}{200 \times 19{,}63495} = 1$$

$$\Rightarrow F_A \times 400 + F_A \times 800 - 20 \times 800 = 200 \times 19{,}63495$$

$$\Rightarrow F_A \times (400 + 800) = 200 \times 19{,}63495 + 20 \times 800$$

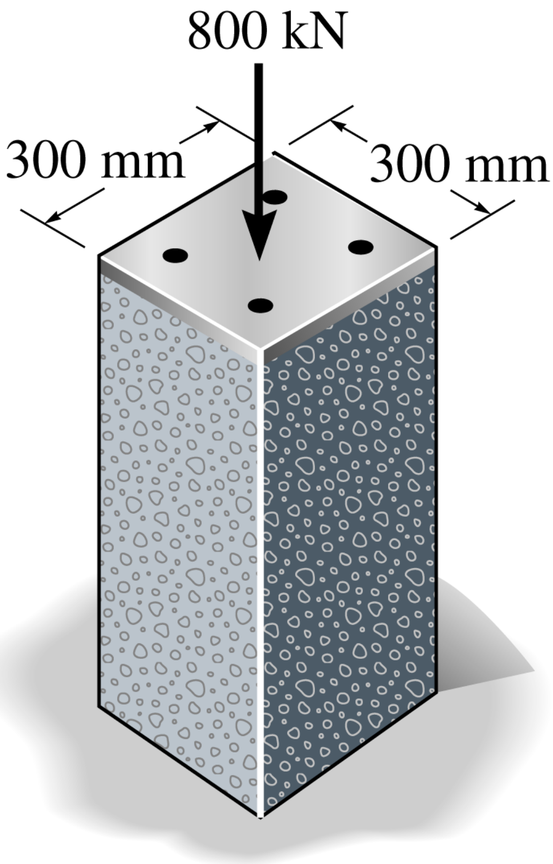
$$\Rightarrow F_A = \frac{200 \times 19{,}63495 + 16000}{1200} = 16{,}60583\text{ kN}$$

De (1) vem que:

$$\Rightarrow F_B = 20 - 16{,}60583 = 3{,}394174\text{ kN}$$

Resposta: As reações em A e B são **16,6 kN** e **3,39 kN**, respectivamente.

4.42 A coluna de concreto é reforçada com quatro barras de aço, cada uma com diâmetro de 18 mm. Determinar a tensão média do concreto e do aço se a coluna é submetida a uma carga axial de 800 kN. $E_{aço}$ = 200 GPa e Ec = 25 GPa.



Solução:

E_s=200 GPa
E_c=25 GPa

$$A_s = 4\left(\frac{\pi\,18^2}{4}\right) = 1017{,}88\ \text{mm}^2$$

$$A_c = 300\times300 - A_s = 88982{,}1\ \text{mm}^2$$

P=800 kN
P_c – parte da força P no concreto
P_s – parte da força P no aço

$$P_c + P_s = P \Rightarrow P_c = P - P_s$$

$$\delta_c = \delta_s \Rightarrow \frac{P_c\,L}{E_c\,A_c} = \frac{P_s\,L}{E_s\,A_s} \Rightarrow P_s(E_c\,A_c) = P_c(E_s\,A_s) \Rightarrow P_s(E_c\,A_c) = (P-P_s)(E_s\,A_s)$$

$$\Rightarrow P_s(E_c\,A_c) = P(E_s\,A_s) - P_s(E_s\,A_s) \Rightarrow P_s(E_c\,A_c) + P_s(E_s\,A_s) = P(E_s\,A_s)$$

$$\Rightarrow P_s(E_c\,A_c + E_s\,A_s) = P\,(E_s\,A_s) \Rightarrow P_s = P\,\frac{E_s\,A_s}{E_c\,A_c + E_s\,A_s}$$

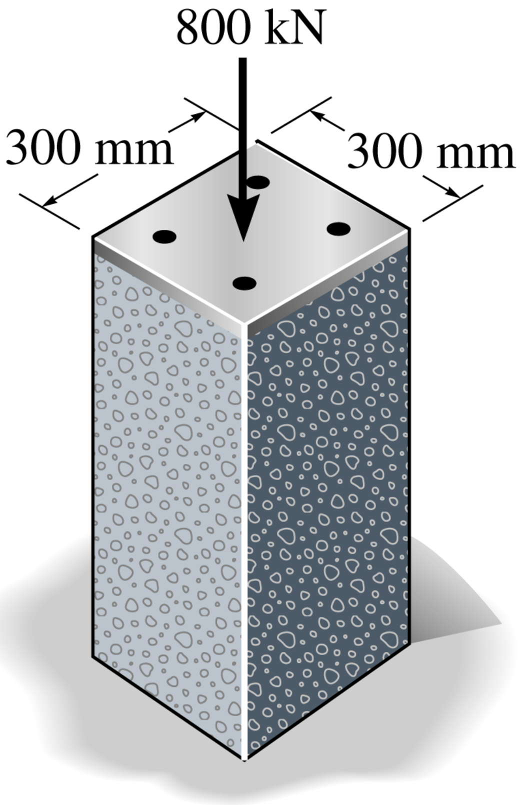
$$\Rightarrow P_s = 800000\times\frac{200000\times1017{,}88}{25000\times88982{,}1 + 200000\times1017{,}88} = 67072{,}3\ \text{N}$$

$$\Rightarrow P_c = 800000 - 67072{,}3 = 732927{,}7\ \text{N}$$

$$\Rightarrow \sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{67072{,}3}{1017{,}88} = 65{,}9\ \text{MPa} \qquad \Rightarrow \sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{732927{,}7}{88982{,}1} = 8{,}24\ \text{MPa}$$

Resposta: A tensão normal média do concreto é de **8,24 MPa** e a tensão normal média do aço é de **65,9 MPa**.

4.43 A coluna mostrada na figura é fabricada de concreto com alta resistência (**E_c=29 GPa**) e quatro barras de reforço de aço A36. Se a coluna é submetida a uma carga axial de 800 kN, determine o diâmetro necessário a cada barra para que um quarto da carga seja sustentada pelo aço e três quartos pelo concreto.



Solução:

E_s=200 GPa
E_c=25 GPa
$A_c = 300 \times 300 - A_s$
P=800 kN
P_c – parte da força P no concreto
P_s – parte da força P no aço

$$P_c + P_s = P \Rightarrow P_c = P - P_s$$

$$P_c = P\,\frac{E_c\,A_c}{E_c\,A_c + E_s\,A_s} \Rightarrow \frac{P_c}{P} = \frac{E_c\,A_c}{E_c\,A_c + E_s\,A_s} \Rightarrow \frac{P}{P_c} = \frac{E_c\,A_c + E_s\,A_s}{E_c\,A_c}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{P_c} = 1 + \frac{E_s\,A_s}{E_c\,A_c} \Rightarrow \frac{E_s\,A_s}{E_c\,A_c} = \frac{P}{P_c} - 1 \Rightarrow \frac{A_s}{A_c} = \left(\frac{P}{P_c} - 1\right)\left(\frac{E_c}{E_s}\right)$$

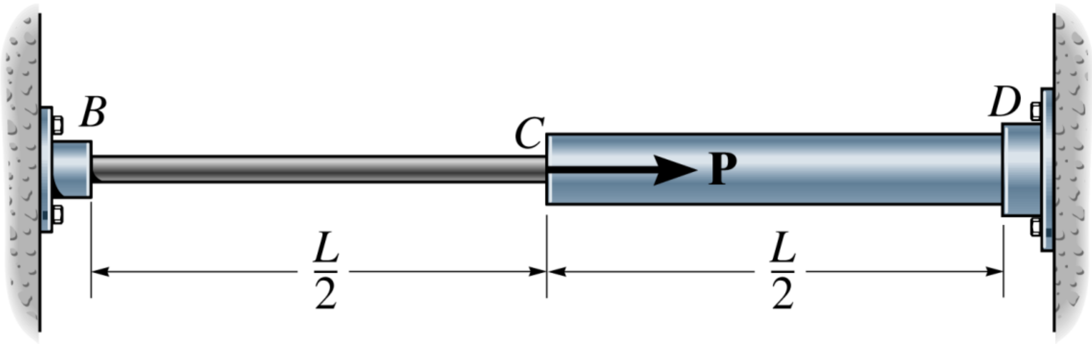
$$\Rightarrow \frac{A_c}{A_s} = \frac{1}{\left(\frac{P}{P_c} - 1\right)\left(\frac{E_c}{E_s}\right)} \Rightarrow \frac{90000 - A_s}{A_s} = \frac{1}{\left(\frac{P_s}{P_c}\right)\left(\frac{E_c}{E_s}\right)} \Rightarrow \frac{90000}{A_s} = \left(\frac{P_c}{P_s}\right)\left(\frac{E_s}{E_c}\right) + 1$$

$$\Rightarrow A_s = \frac{90000}{\left(\frac{P_c}{P_s}\right)\left(\frac{E_s}{E_c}\right) + 1} \Rightarrow 4\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = \frac{90000}{\left(\frac{P_c}{P_s}\right)\left(\frac{E_s}{E_c}\right) + 1} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{\frac{90000}{\pi}}{\left(\frac{P_c}{P_s}\right)\left(\frac{E_s}{E_c}\right) + 1}}$$

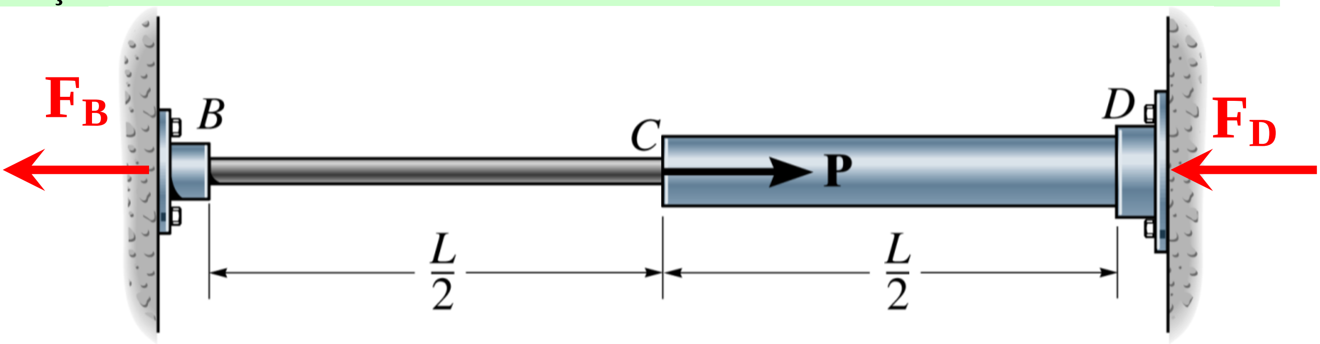
$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{\frac{90000}{\pi}}{\left(\frac{P_c}{P_s}\right)\left(\frac{E_s}{E_c}\right) + 1}} = \sqrt{\frac{\frac{90000}{\pi}}{\left(\frac{600}{200}\right)\left(\frac{200000}{29000}\right) + 1}} = 36{,}34 \text{ mm}$$

Resposta: O diâmetro necessário é de **36,3 mm** a cada barra para que um quarto da carga seja sustentado pelo aço e três quartos pelo concreto.

4.45 Os dois tubos são feitos do mesmo material e estão acoplados como mostrado abaixo. Supondo que a área da seção transversal de BC seja A e a de CD seja 2A, determinar as reações em B e D quando a força P for aplicada na junção C.



Solução:



Por equilíbrio: $F_B + F_D = P$ (1)

Pela restrição de deslocamento total de B até D: $\delta_{BD} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i} = 0$ (2)

Esforços normais:

$N_{BC} = F_B$

$N_{CD} = F_B - P$

$$\delta_{BD} = \frac{N_{BC} L_{BC}}{EA} + \frac{N_{CD} L_{CD}}{E(2A)} = 0 \Rightarrow \frac{F_B \times \frac{L}{2}}{EA} + \frac{(F_B - P) \times \frac{L}{2}}{E(2A)} = 0$$

$$\Rightarrow F_B + \frac{(F_B - P)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2F_B + (F_B - P)}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3F_B - P = 0$$

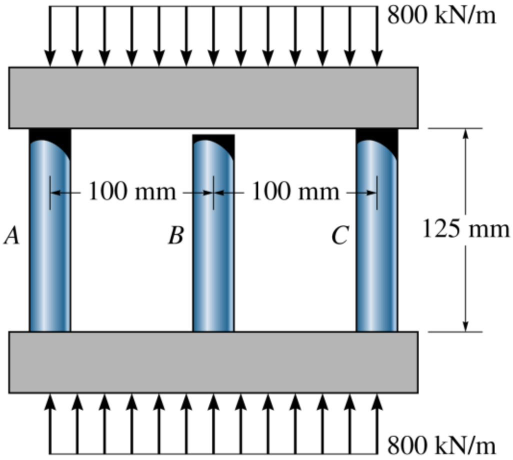
$$\Rightarrow F_B = \frac{P}{3}$$

De (1) vem que:

$$\Rightarrow F_D = P - F_B = P - \frac{P}{3} = \frac{2P}{3}$$

Resposta: As reações em B e D são **P/3** e **2P/3**, respectivamente.

4.53 A coluna central B da estrutura mostrada na figura tem um comprimento original de 124,7 mm, enquanto as colunas A e C têm comprimentos de 125 mm. Se as vigas do topo e da base forem consideradas rígidas, determine a tensão normal média atuante em cada coluna. As colunas são feitas de alumínio e tem área de seção transversal média de 400 mm². Considere E_{al}=70 GPa.



Solução:

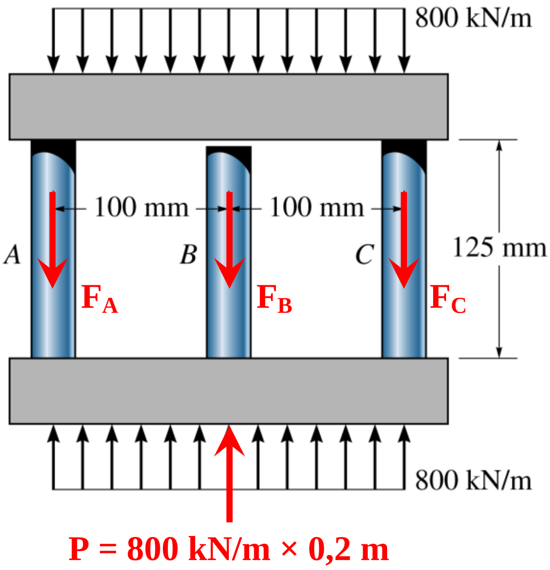
Equações de equilíbrio estático:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_B + F_C - P = 0$$

$$\Rightarrow F_A + F_B + F_C = P \qquad (1)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -F_A \times 0{,}2 + F_C \times 0{,}2 = 0$$

$$\Rightarrow F_A = F_C \qquad (2)$$



Equação de compatibilidade de deslocamentos:

$$\delta_A = \delta_C = \delta_B + 0{,}3\ \text{mm}$$

$$\delta_A = \delta_B + 0{,}3 \Rightarrow \frac{F_A \times 125}{EA} = \frac{F_B \times 124{,}7}{EA} + 0{,}3\ \text{mm}$$

$$\frac{F_A \times 125\ \text{mm}}{70\ \dfrac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times 400\ \text{mm}^2} = \frac{F_B \times 124{,}7\ \text{mm}}{70\ \dfrac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times 400\ \text{mm}^2} + 0{,}3\ \text{mm}$$

$$F_A \times 125\ \text{mm} = F_B \times 124{,}7\ \text{mm} + (0{,}3\ \text{mm}) \times \left(70\ \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times 400\ \text{mm}^2\right)$$

$$\Rightarrow 125\ F_A - 124{,}7\ F_B = 8400 \qquad (3)$$

Resolvendo as equações (1), (2) e (3):

$$F_A = F_C = 75{,}726\ \text{kN}$$

$$F_B = 8{,}5470\ \text{kN}$$

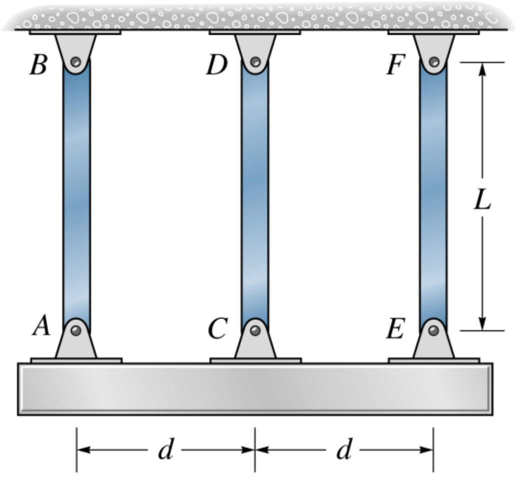
Assim:

$$\sigma_A = \sigma_C = \frac{F_C}{A} = \frac{75{,}726\ \text{kN}}{400\ \text{mm}^2} = 0{,}1893\ \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$$

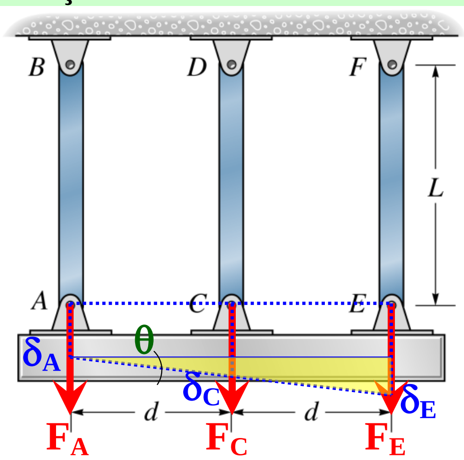
$$\sigma_B = \frac{F_B}{A} = \frac{8{,}5470\ \text{kN}}{400\ \text{mm}^2} = 0{,}02137\ \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$$

Resposta: As tensões normais médias atuantes nas colunas A, B e C são **189 MPa**, **21,4 MPa e 189 MPa**, respectivamente.

4.115 O conjunto consiste em duas barras AB e CD do mesmo material, com módulo de elasticidade E_1 e coeficiente de expansão térmica α_1, e uma barra EF com módulo de elasticidade E_2 e coeficiente de expansão térmica α_2. Todas as barras têm o mesmo comprimento L e área da seção transversal A. Se a viga rígida estiver inicialmente horizontal na temperatura T_1, determinar o ângulo que ela faz com a horizontal quando a temperatura aumenta para T_2.



Solução:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_C + F_E = 0 \Rightarrow F_A + F_C + F_E = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -F_A(d) + F_E(d) = 0 \Rightarrow F_A = F_E \qquad (2)$$

$$\delta_A = (\delta_{AB})_T - (\delta_{AB})_F = \alpha_1 L(T_2 - T_1) - \frac{F_A L}{E_1 A}$$

$$\delta_C = (\delta_{CD})_T - (\delta_{CD})_F = \alpha_1 L(T_2 - T_1) - \frac{F_C L}{E_1 A}$$

$$\delta_E = (\delta_{EF})_T - (\delta_{EF})_F = \alpha_2 L(T_2 - T_1) - \frac{F_E L}{E_2 A}$$

Compatibilidade geométrica:

$$\frac{\delta_E - \delta_A}{2d} = \frac{\delta_E - \delta_C}{d} \Rightarrow \frac{\delta_E - \delta_A}{2} = \delta_E - \delta_C \Rightarrow \delta_E - \delta_A = 2\delta_E - 2\delta_C \Rightarrow \delta_C = \frac{\delta_E + \delta_A}{2}$$

$$\alpha_1 L(T_2 - T_1) - \frac{F_C L}{E_1 A} = \frac{\alpha_2 L(T_2 - T_1) - \frac{F_E L}{E_2 A} + \alpha_1 L(T_2 - T_1) - \frac{F_A L}{E_1 A}}{2} \qquad (3)$$

Resolvendo as equações 1, 2 e 3 simultaneamente, temos:

$$F_A = F_E = \frac{E_1 E_2 A(T_2 - T_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}{5E_2 + E_1}$$

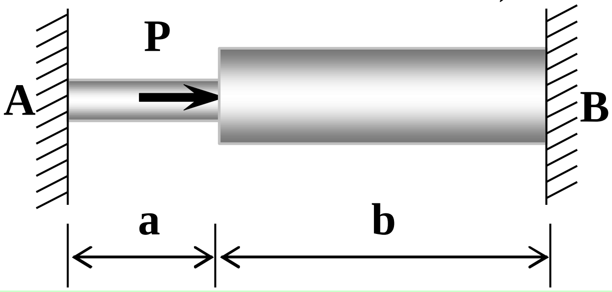
$$F_C = -2 \times \frac{E_1 E_2 A(T_2 - T_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}{5E_2 + E_1}$$

Assim:

$$tg(\theta) \cong \theta = \frac{\delta_E - \delta_A}{2d} \Rightarrow \theta = \frac{3E_2 L(T_2 - T_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}{d(5E_2 + E_1)}$$

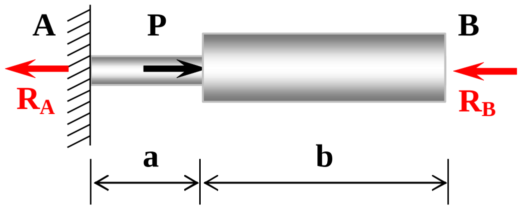
Resposta: O ângulo que a viga rígida faz com a horizontal é: $\boldsymbol{\theta = \frac{3E_2L(T_2-T_1)(\alpha_2-\alpha_1)}{d(5E_2+E_1)}}$

7) Uma barra tem seção reduzida como se vê na figura ao lado, está engastada entre suportes rígidos (indeslocáveis), e suporta uma força axial, P. Calcular as reações de apoio em A e B, supondo A_1= área da seção transversal na parte esquerda e A_2 = área da seção transversal direita. (Usar os seguintes valores numéricos: P= 76 kN; A_1=500 mm^2; A_2=750 mm^2; a=140 mm; b=420 mm; E=140GPa).



Solução:

Tornando a barra isostática, tirando o apoio B, podemos calcular o deslocamento total que é a soma dos deslocamentos de cada trecho (tomando as seções à direita).



$$\delta = \frac{N_1 \times L_1}{E_1 \times A_1} + \frac{N_2 \times L_2}{E_2 \times A_2}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{-R_B \times b}{E \times A_2} + \frac{(-R_B + P) \times a}{E \times A_1}$$

$$\Rightarrow \delta = -R_B \left(\frac{b}{E \times A_2} + \frac{a}{E \times A_1} \right) + \frac{P \times a}{E \times A_1}$$

No entanto, para que o apoio exista, esse deslocamento total deve ser nulo:

$$\Rightarrow 0 = -R_B \left(\frac{b}{E \times A_2} + \frac{a}{E \times A_1} \right) + \frac{P \times a}{E \times A_1} \quad \Rightarrow R_B \left(\frac{b}{A_2} + \frac{a}{A_1} \right) = \frac{P \times a}{A_1} \quad \Rightarrow$$

$$R_B \left(\frac{420}{750} + \frac{140}{500} \right) = \frac{76000 \times 140}{500}$$

$$\therefore R_B = 25333{,}33 \text{ N}$$

Através da equação da isostática podemos encontrar o valor de R_A

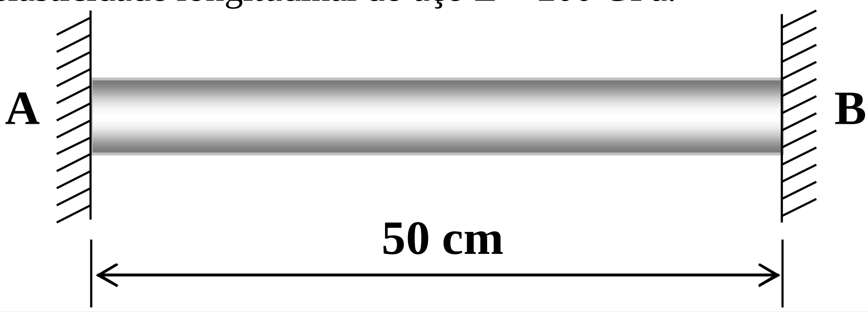
$$\sum F = 0 \Rightarrow R_A + R_B - P = 0 \Rightarrow$$

$$R_A + 25333{,}33 - 76000 = 0$$

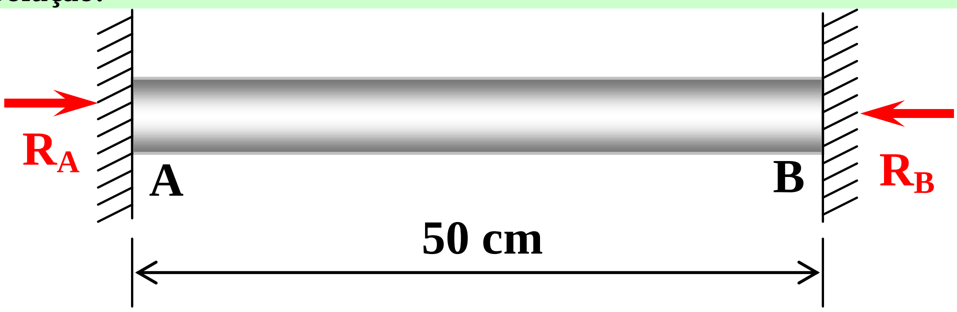
$$\therefore R_A = 50666{,}67 \text{ N}$$

Resposta: As reações em A e B são **50,7 kN** e **25,3 kN**, respectivamente.

8) Uma barra de aço A36, de 5 cm de diâmetro, se encaixa entre dois suportes rígidos, à temperatura ambiente. Calcular as reações de apoio, quando a temperatura aumenta 20°C. Admitir o coeficiente de dilatação térmica do aço $\alpha = 12 \times 10^{-6}$ °C^{-1} e o módulo de elasticidade longitudinal do aço E = 200 GPa.



Solução:



$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = R_B = R \qquad (1)$

Caso não existisse o apoio B, teríamos o **encurtamento** devido à força R:

$$(\delta_{AB})_R = \frac{R\ L}{E\ A}$$

Caso não existisse o apoio B, teríamos o **alongamento** devido à variação de temperatura T:

$$(\delta_{AB})_T = \alpha\ L\ \Delta T$$

Como o apoio existe, não temos alongamento nem encurtamento da barra, daí a equação de compatibilidade de deslocamentos:

$$(\delta_{AB})_R = (\delta_{AB})_T \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R\ L}{E\ A} = \alpha\ L\ \Delta T$$

$$\therefore R = E\ A\ \alpha\ \Delta T$$

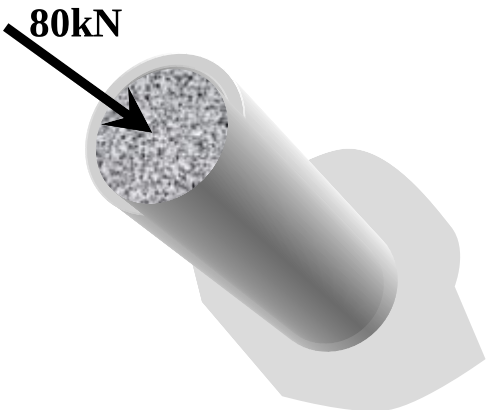
Assim:

$$R = 20000\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times \frac{\pi(5\ \text{cm})^2}{4} \times 12 \times 10^{-6}\ {}^{\text{o}}\text{C}^{-1} \times 20^{\text{o}}\text{C}$$

$$\therefore R = 94{,}2477796\ \text{kN}$$

Resposta: As reações em A e B são de compressão iguais a **94,2 kN**.

9) O tubo de aço de 500 mm de comprimento é preenchido com concreto e sujeito a uma força compressiva de 80 kN. Determine as tensões no concreto e no aço devidas a este carregamento. O tubo de aço tem diâmetro externo de 80 mm e um diâmetro interno de 70 mm. Considere $E_{aço}$=200 GPa e E_{conc}=24 GPa



Solução:

P=força no tubo

P_c=parte da força P no concreto

P_s=parte da força P no aço

$$P = P_c + P_s$$

Compatibilidade de deslocamentos

$$\delta_c = \delta_s \Rightarrow \frac{P_c L}{E_c A_c} = \frac{P_s L}{E_s A_s} \Rightarrow \frac{P_c}{E_c A_c} = \frac{P_s}{E_s A_s} \Rightarrow \frac{P - P_s}{E_c A_c} = \frac{P_s}{E_s A_s} \Rightarrow \frac{P_s}{E_s A_s} + \frac{P_s}{E_c A_c} = \frac{P}{E_c A_c}$$

$$\Rightarrow P_s \frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{E_c A_c} = \frac{P}{E_c A_c} \Rightarrow P_s \frac{E_c A_c + E_s A_s}{E_s A_s E_c A_c} = \frac{P}{E_c A_c} \Rightarrow P_s \frac{E_c A_c + E_s A_s}{E_s A_s} = P$$

$$\Rightarrow P_s = P \frac{E_s A_s}{E_c A_c + E_s A_s}$$

Como:

$$E_s = 200\ \text{kN/mm}^2 \qquad \text{e} \qquad E_c = 24\ \text{kN/mm}^2$$

$$A_s = \frac{\pi}{4}\left(80^2 - 70^2\right) = 1178{,}097\ \text{mm}^2 \qquad \text{e} \qquad A_c = \frac{\pi}{4} 70^2 = 3848{,}451\ \text{mm}^2$$

Assim:

$$P_s = 80 \times \frac{200 \times 1178{,}097}{24 \times 3848{,}451 + 200 \times 1178{,}097} = 57{,}471\ \text{kN}$$

$$P_c = P - P_s = 80 - 57{,}471 = 22{,}529\ \text{kN}$$

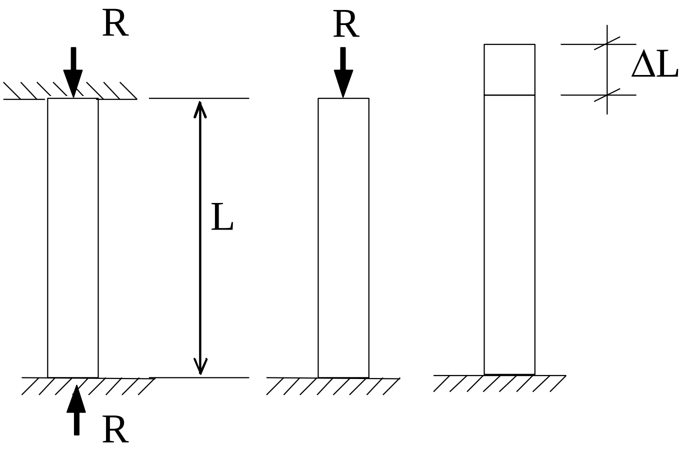
Então as tensões no aço e no concreto são:

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{57471\ \text{N}}{1178{,}097\ \text{mm}^2} = 48{,}8\ \text{MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{22529\ \text{N}}{3848{,}451\ \text{mm}^2} = 5{,}85\ \text{MPa}$$

Resposta: A tensão normal média do concreto é de **5,85 MPa** e a tensão normal média do aço é de **48,8 MPa**.

10) Qual seria a reação, R, da barra engastada da figura abaixo, se ao invés de uma variação de temperatura ΔT, a barra tivesse um comprimento inicial a $L+\Delta L$ em lugar de L. (Admitir a distância entre os suportes igual a L.)



Solução:

Retirando o apoio superior e aplicando a reação R como uma carga, podemos calcular o deslocamento δ na extremidade da barra:

$$\delta = \frac{R.L}{E.A} \qquad (1)$$

mas sabemos que este deslocamento é ΔL, ou melhor:

$\delta = \Delta L$ (2)

combinando (1) e (2), temos que: $\Delta L = \dfrac{R.L}{E.A}$

portanto a reação é: $R = E.A.\dfrac{\Delta L}{L}$

Resposta: As reações de apoio são compressivas iguais a $\mathbf{R = EA\frac{\Delta L}{L}}$