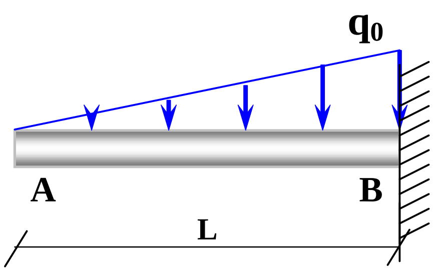
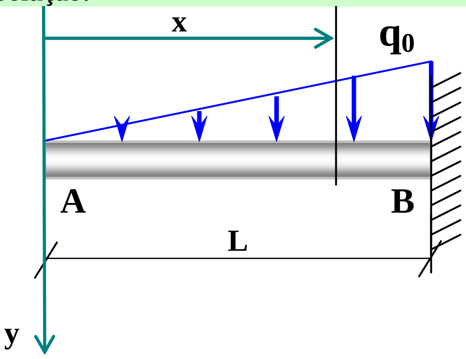
1) Encontre a equação da linha elástica para a viga engastada com carga distribuída triangular vista na figura ao lado.



Solução:



Equação dos momentos fletores (origem dos eixos em A):

$$M(x) = -\frac{(x)\left(\frac{q_0 x}{L}\right)}{2}\frac{x}{3} = -\frac{q_0 x^2}{2L}\frac{x}{3} = -\frac{q_0 x^3}{6L} \quad \Rightarrow 0 \le x \le L$$

Equação diferencial da linha elástica:

$$EIv''(x) = \frac{q_0 x^3}{6L} \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le L$$

Integrando uma vez:

$$EIv'(x) = \frac{q_0 x^4}{24L} + C_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le L$$

Integrando mais uma vez:

$$EIv(x) = \frac{q_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le L$$

Condições de contorno:

$$v'(L) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{q_0 L^3}{24}$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{q_0 L^4}{30}$$

Portanto a equação da linha elástica fica assim:

$$EI\ v(x) = \frac{q_0 x^5}{120L} - \frac{q_0 L^3}{24}x + \frac{q_0 L^4}{30} \qquad \text{ou}$$

$$\therefore v(x) = \frac{q_0}{120L\ EI}\left(x^5 - 5L^4 x + 4L^5\right) \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le L$$

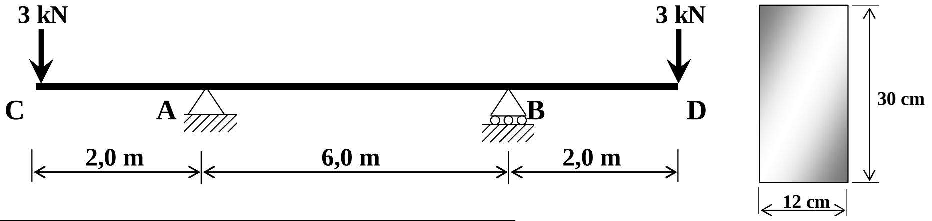
e a flecha máxima, δ_{max}, e declividade máxima, θ_{max}, na extremidade livre (A) é:

$$\delta_{max} = v(0) = \frac{q_0}{120L\ EI}\left(0^5 - 5L^4 0 + 4L^5\right) = \frac{q_0}{120L\ EI}\left(4L^5\right) = \frac{q_0}{30L\ EI}\left(L^5\right)$$

$$\theta_{max} = v'(0) = \frac{q_0 0^4}{24EIL} - \frac{q_0 L^3}{24EI}$$

$$\therefore \delta_{max} = \frac{q_0 L^4}{30\ EI} \qquad \therefore \theta_{max} = -\frac{q_0 L^3}{24EI}$$

2) Calcule o máximo deslocamento entre A e B da viga biapoiada com balanços, feita de madeira (E=12,5 GPa) com seção transversal retangular vista ao lado da mesma:



$$E = 12{,}5\ \text{GPa} = 12500\ \text{MPa} = 12{,}5\times10^{6}\ \text{kN/m}^2$$
$$I = \frac{12\times30^3}{12}\ \text{cm}^4 = 27000\ \text{cm}^4 = 0{,}00027\ \text{m}^4$$
$$\therefore E\,I = \left(12{,}5\times10^{6}\right)\times\left(2{,}7\times10^{-4}\right) = 3375\ \text{kN m}^2$$

Solução:

Vamos calcular as reações de apoio:

$$\sum M_{z(B)} = 0 \Rightarrow V_A\times6-3\times8+3\times2=0 \quad \therefore V_A = 3\ \text{kN}$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - 3 - 3 = 0 \quad \therefore V_B = 3\ \text{kN}$$

Vamos encontrar as equações de momento fletor:

$$M_1(x) = -3x \quad \Rightarrow \quad 0\le x\le 2\ \text{m}$$
$$M_2(x) = -3x + V_A(x-2) = -3x + 3(x-2) \quad \Rightarrow \quad 2\le x\le 8\ \text{m}$$
$$M_3(x) = -3x + V_A(x-2) + V_B(x-8) = -3x + 3(x-2) + 3(x-8) \quad \Rightarrow \quad 8\le x\le 10\ \text{m}$$

Agora, vamos montar as equações diferenciais da linha elástica (uma para cada trecho):

$$EI\ v_1''(x) = 3x \quad \Rightarrow \quad 0\le x\le 2\ \text{m}$$
$$EI\ v_2''(x) = 3x - 3(x-2) \quad \Rightarrow \quad 2\le x\le 8\ \text{m}$$
$$EI\ v_3''(x) = 3x - 3(x-2) - 3(x-8) \quad \Rightarrow \quad 8\le x\le 10\ \text{m}$$

E, assim, resolvê-las através de duas integrações. Primeira integração:

$$EI\ v_1'(x) = 3\frac{x^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad 0\le x\le 2\ \text{m}$$
$$EI\ v_2'(x) = 3\frac{x^2}{2} - 3\frac{(x-2)^2}{2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad 2\le x\le 8\ \text{m}$$
$$EI\ v_2'(x) = 3\frac{x^2}{2} - 3\frac{(x-2)^2}{2} - 3\frac{(x-8)^2}{2} + C_3 \quad \Rightarrow \quad 8\le x\le 10\ \text{m}$$

Segunda integração:

$$EI\ v_1(x) = 3\frac{x^3}{6} + C_1x + C_4 \quad \Rightarrow \quad 0\le x\le 2\ \text{m}$$
$$EI\ v_2(x) = 3\frac{x^3}{6} - 3\frac{(x-2)^3}{6} + C_2x + C_5 \quad \Rightarrow \quad 2\le x\le 8\ \text{m}$$
$$EI\ v_2(x) = 3\frac{x^3}{6} - 3\frac{(x-2)^3}{6} - 3\frac{(x-8)^3}{6} + C_3x + C_6 \quad \Rightarrow \quad 8\le x\le 10\ \text{m}$$

As condições de contorno para a viga são:

$$v'_1(2) = v'_2(2) \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2$$
$$v_1(2) = v_2(2) \quad \Rightarrow \quad C_4 = C_5$$
$$v'_2(8) = v'_3(8) \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_3$$
$$v_1(8) = v_2(8) \quad \Rightarrow \quad C_5 = C_6$$

$$v(2)=0 \quad \Rightarrow \quad E\,I\,v_1(2)=3\frac{2^3}{6}+C_1 2+C_4=0 \quad \Rightarrow \quad C_4=-2\times C_1-4$$

$$v(8)=0 \quad \Rightarrow \quad E\,I\,v_2(8)=3\frac{8^3}{6}-3\frac{(8-2)^3}{6}+C_2 8+C_5=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8^3}{2}-\frac{6^3}{2}+C_2 8+\left(-2\times C_1-4\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{8^3}{2}-\frac{6^3}{2}+8\times C_2+\left(-2\times C_2-4\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad C_2=-24 \quad \Rightarrow \quad C_1=C_2=C_3=-24$$

$$\Rightarrow \quad C_4=44 \quad \Rightarrow \quad C_4=C_5=C_6=44$$

Então:

$$E\,I\,v_1(x)=3\frac{x^3}{6}-24x+44 \quad \Rightarrow \quad 0\le x\le 2\text{ m}$$

$$E\,I\,v_2(x)=3\frac{x^3}{6}-3\frac{(x-2)^3}{6}-24x+44 \quad \Rightarrow \quad 2\le x\le 8\text{ m}$$

$$E\,I\,v_2(x)=3\frac{x^3}{6}-3\frac{(x-2)^3}{6}-3\frac{(x-8)^3}{6}+-24x+44 \quad \Rightarrow \quad 8\le x\le 10\text{ m}$$

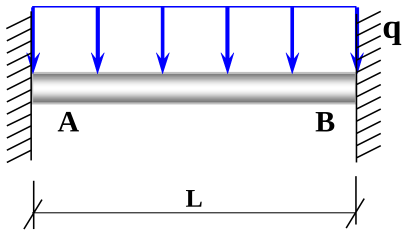
O deslocamento entre A e B (centro, x=5m) é:

$$E\,I\,v_2(5)=3\frac{5^3}{6}-3\frac{(5-2)^3}{6}-24\times 5+44=-27$$

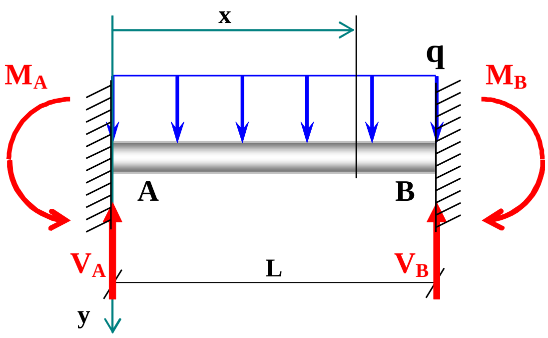
$$\Rightarrow \quad v_2(5)=-\frac{27}{E\,I}=-\frac{27}{3375}=-0{,}008\text{ m}$$

Resposta: O deslocamento entre A e B é de 8 mm para cima.

3) Encontre a equação da linha elástica e as reações de apoio para a viga biengastada com carga distribuída retangular vista na figura ao lado.



Solução:



Solução:

Por simetria de carregamentos, as reações de apoio são:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - q\,L = 0 \Rightarrow V_A = \frac{q\,L}{2} \Rightarrow V_B = \frac{q\,L}{2}$$

$$M_A = M_B$$

Equação dos momentos fletores:

$$M(x) = q\frac{L}{2}x - M_A - q\frac{x^2}{2} \Rightarrow 0 \le x \le L$$

Equação diferencial da linha elástica:

$$EIv''(x) = -\frac{q}{2}\left(Lx - x^2\right) + M_A \Rightarrow 0 \le x \le L$$

Integrando uma vez:

$$EIv'(x) = -\frac{q}{2}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + M_A x + C_1 \Rightarrow 0 \le x \le L$$

Integrando Mais uma vez:

$$EIv(x) = -\frac{q}{2}\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + M_A\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \Rightarrow 0 \le x \le L$$

Condições de contorno:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$v'(L) = 0 \Rightarrow EIv'(L) = -\frac{q}{2}\left(\frac{L\,L^2}{2} - \frac{L^3}{3}\right) + M_A L = 0 \Rightarrow M_A = \frac{qL^2}{12}$$

Portanto a equação da linha elástica fica assim:

$$EI\,v(x) = -\frac{q}{2}\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + \frac{qL^2}{12}\frac{x^2}{2} \Rightarrow 0 \le x \le L$$

$$\therefore v(x) = \frac{qx^2}{24EI}\left(x^2 - 2Lx + L^2\right) \Rightarrow 0 \le x \le L$$