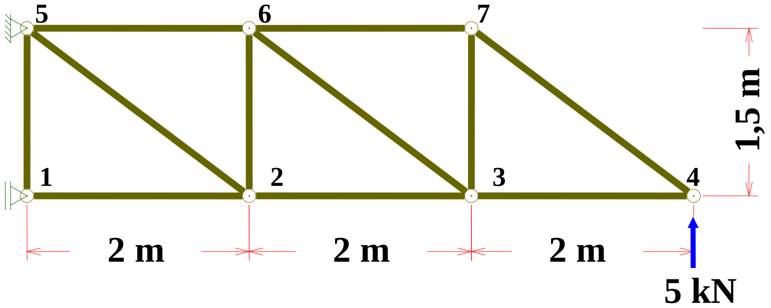
1 – Considere a treliça plana abaixo. Os nós são rótulas perfeitas. Os banzos têm inércia EA=256000 kN e as demais barras EA=64000 kN. As barras são identificadas pelos seus nós iniciais Ni e nós finais Nf. Na tabela abaixo: N0 são os esforços nas barras para os carregamentos originais e N1 são os esforços para uma força unitária para cima aplicada no nó 4. Calcule o deslocamento vertical do nó 4.



Ni	Nf	N0	N1	L	EA	N0 × N1 × L
1	2	20,000	4,000			
2	3	13,333	2,667			
3	4	6,667	1,333			
5	6	-13,333	-2,667			
6	7	-6,667	-1,333			
1	5	0,000	0,000			
2	6	5,000	1,000			
3	7	5,000	1,000			
2	5	-8,333	-1,667			
3	6	-8,333	-1,667			
4	7	-8,333	-1,667			

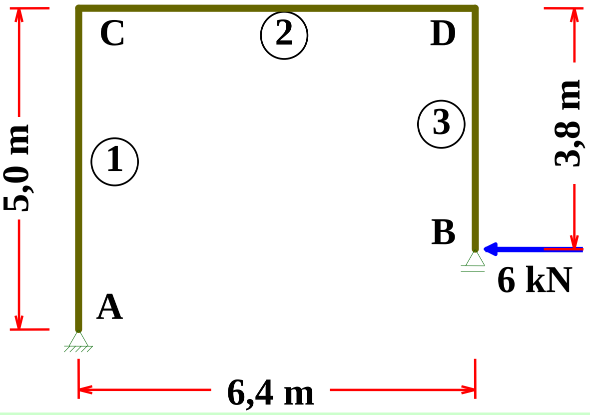
Solução:

Ni	Nf	N0	N1	L	EA	N0 × N1 × L
1	2	20,000	4,000	2,0	256000	160,000
2	3	13,333	2,667	2,0	256000	71,108
3	4	6,667	1,333	2,0	256000	17,780
5	6	-13,333	-2,667	2,0	256000	71,108
6	7	-6,667	-1,333	2,0	256000	17,780
						337,774
1	5	0,000	0,000	1,5	64000	0,000
2	6	5,000	1,000	1,5	64000	7,500
3	7	5,000	1,000	1,5	64000	7,500
2	5	-8,333	-1,667	2,5	64000	34,719
3	6	-8,333	-1,667	2,5	64000	34,719
4	7	-8,333	-1,667	2,5	64000	34,719
						119,158

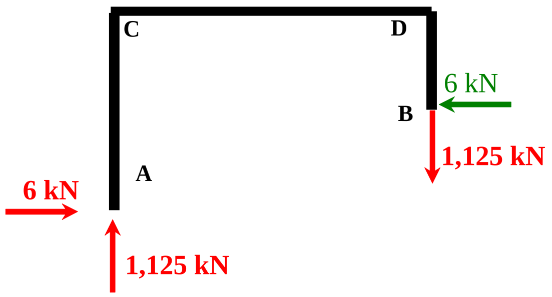
$$\delta = \frac{\sum N\overline{N}L}{EA} = \frac{337{,}774}{256000} + \frac{119{,}158}{64000} = 0{,}00318 \ \text{m} \qquad \therefore \delta = 3{,}18 \text{ mm}$$

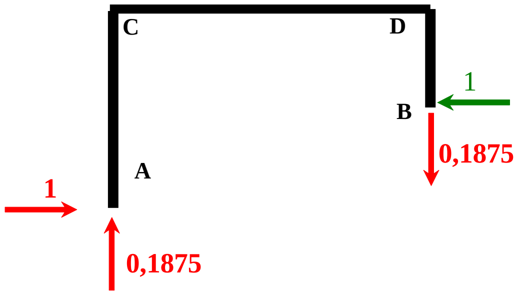
Resposta: Deslocamento vertical do nó 4 é δ=3,18 mm (para cima)

2 – Calcule o deslocamento horizontal do apoio B do pórtico hiperestático representado pela figura abaixo. Considere as barras 1 e 3 de inércia EI=22000 kN.m^2 e a barra 2 de inércia 3EI, todas trabalhando fundamentalmente à flexão.



Solução:





Equações de momentos para o carregamento original	Equações de momentos para a carga unitária
Barra BD – origem do eixo x em B $M_{BD}(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 3{,}8\ \text{m}$	Barra BD – origem do eixo x em B $\overline{M}_{BD}(x) = x \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 3{,}8\ \text{m}$
Barra CD – origem do eixo x em D $M_{CD}(x) = 22{,}8 + 1{,}125x \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 6{,}4\ \text{m}$	Barra CD – origem do eixo x em D $\overline{M}_{CD}(x) = 3{,}8 + 0{,}1875x \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 6{,}4\ \text{m}$
Barra AC – origem do eixo x em A $M_{AC}(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 5\ \text{m}$	Barra AC – origem do eixo x em A $\overline{M}_{AC}(x) = x \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 5\ \text{m}$

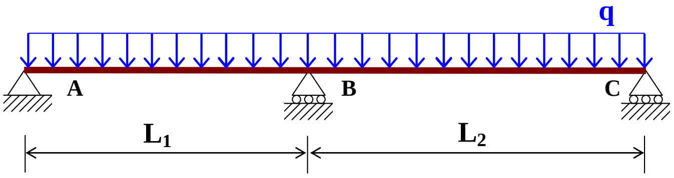
$$\delta_{HB} = \int \frac{M\overline{M}}{EI} = \int_0^{3,8} \frac{(6x)(x)}{EI}\,dx + \int_0^{6,4} \frac{(22{,}8+1{,}125x)(3{,}8+0{,}1875x)}{3EI}\,dx + \int_0^{5} \frac{(6x)(x)}{EI}\,dx$$

$$\Rightarrow \delta_{HB} = 6\int_0^{3,8} \frac{(x^2)}{EI}\,dx + 6\int_0^{6,4} \frac{(3{,}8+0{,}1875x)^2}{3EI}\,dx + 6\int_0^{5} \frac{(x^2)}{EI}\,dx = \frac{609{,}088}{EI}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{HB} = \frac{609{,}088}{22000} = 0{,}0277\ \text{m}$$

Resposta: Deslocamento horizontal do nó B é δ=27,7 mm (para esquerda)

3 – Após calcular as reações de apoio pelo Métodos das Forças, trace os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores da viga de rigidez, EI, constante, vista na figura abaixo. Considere os valores: q= 10 kN/m, L_1 = 4,6 m, L_2 = 5,4 m.



Solução:

$$\delta_0 = \int_\Omega \frac{M\overline{M}}{EI} ds = \int_0^{4,6} \frac{(50x - 5x^2)(-0{,}54x)}{EI} dx + \int_{4,6}^{10} \frac{(50x - 5x^2)(0{,}46x - 4{,}6)}{EI} dx = \frac{-1292{,}094}{EI}$$

$$\delta_1 = \int_\Omega \frac{\overline{M}\overline{M}}{EI} ds = \int_0^{4,6} \frac{(-0{,}54x)(-0{,}54x)}{EI} dx + \int_{4,6}^{10} \frac{(0{,}46x - 4{,}6)(0{,}46x - 4{,}6)}{EI} dx = \frac{20{,}56752}{EI}$$

$$V_B = -\frac{\delta_0}{\delta_1} = -\frac{\frac{-1292{,}094}{EI}}{\frac{20{,}56752}{EI}} = 62{,}822$$

$$M^+_{max} = \frac{V_C^2}{2q} = \frac{21{,}102}{2 \times 10} = 22{,}265$$

$$M^-_{max} = V_A L_1 - \frac{qL_1^2}{2} =$$

$$= 16{,}076 \times 4{,}6 - \frac{10 \times 4{,}6^2}{2} = -31{,}850$$

V_A	=	16,1	kN
V_B	=	62,8	kN
V_C	=	21,1	kN
M_{max}^+	=	22,3	kN.m
M_{max}^-	=	-31,9	kN.m