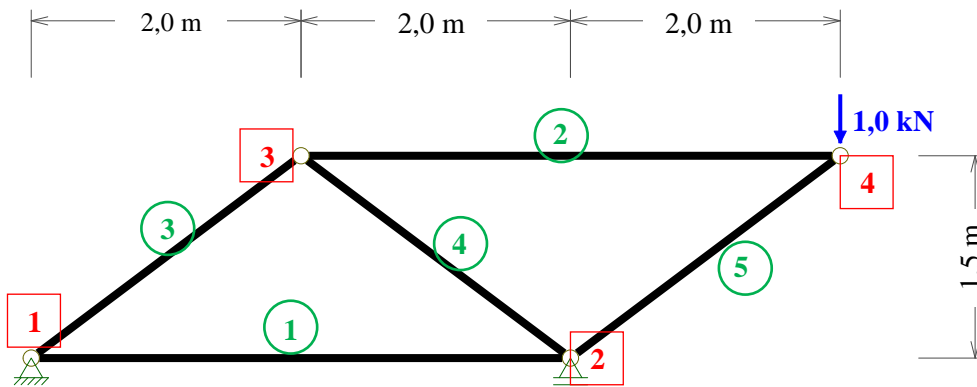
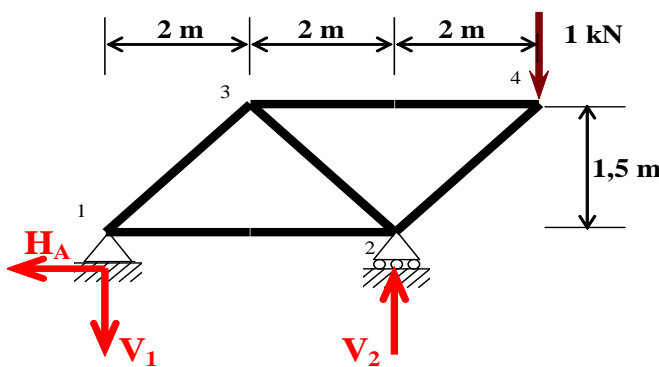


1) Calcule o deslocamento vertical do nó 4 da treliça vista na figura abaixo. Considere os nós como rótulas perfeitas e as barras com inércia $EA = 16000 \text{ kN}$.



Solução:



Utilizando as equações de equilíbrio, calculam-se as reações de apoio.

$$\sum F_x = 0 \quad \therefore H_A = 0$$

Em seguida pode-se resolver a equação: $\sum M_z = 0$, assim, tomando um eixo z que passa pelo ponto 2 temos:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow V_1 \times 4 + 1 \times 2 = 0$$

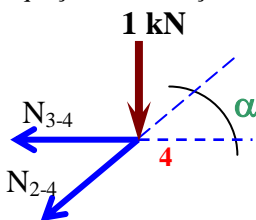
$$\Rightarrow V_1 = 0,5 \text{ kN}$$

• usando a equação: $\sum F_y = 0$, temos:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_1 + V_2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow V_2 = 1,5 \text{ kN}$$

Equações de esforços normais para cada uma das barras: ($\text{sen } \alpha = 0,6$ e $\text{cos } \alpha = 0,8$)

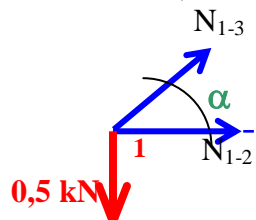


$$1 + N_{2-4} \text{sen } \alpha = 0$$

$$\therefore N_{2-4} = -1,66667 \text{ kN}$$

$$-N_{3-4} - N_{2-4} \text{cos } \alpha = 0$$

$$\therefore N_{3-4} = +1,33333 \text{ kN}$$

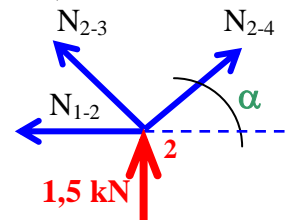


$$N_{1-3} \text{sen } \alpha - 0,5 = 0$$

$$\therefore N_{1-3} = +0,83333 \text{ kN}$$

$$N_{1-2} + N_{1-3} \text{cos } \alpha = 0$$

$$\therefore N_{1-2} = -0,66667 \text{ kN}$$



$$N_{2-3} \text{sen } \alpha + N_{2-4} \text{sen } \alpha + 1,5 = 0$$

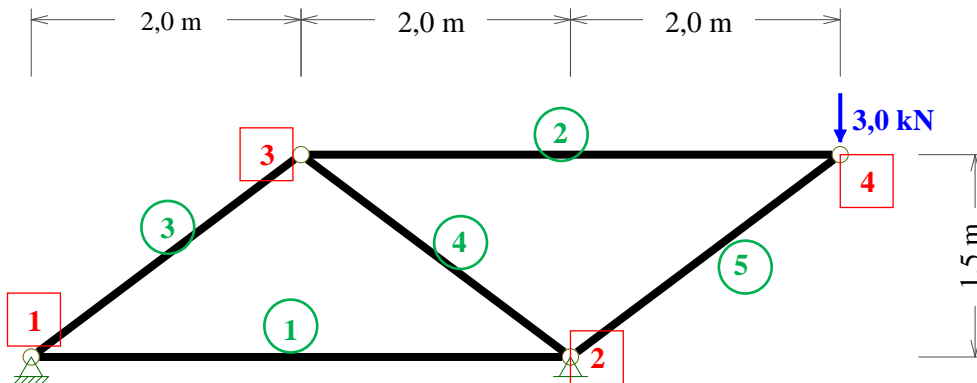
$$\therefore N_{2-3} = -0,83333 \text{ kN}$$

Barra	Nó i	Nó f	N	\bar{N}	L	$N \cdot \bar{N} \cdot L$
1	1	2	-0,66667	-0,66667	4	1,7777956
2	3	4	1,33333	1,33333	4	7,1110756
3	1	3	0,83333	0,83333	2,5	1,7360972
4	2	3	-0,83333	-0,83333	2,5	1,7360972
5	2	4	-1,66667	-1,66667	2,5	6,9444722
$\Sigma =$						19,305538

$$\delta = \frac{\sum N \bar{N} L}{EA} = \frac{19,305538}{16000} = 0,0012066 \text{ m} \quad \therefore \delta = 1,21 \text{ mm}$$

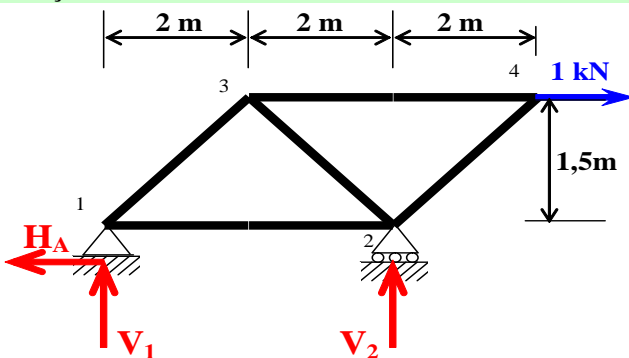
Resposta: Deslocamento vertical do nó 4 é $\delta = 1,21 \text{ mm}$ (para baixo)

2) Calcule o deslocamento horizontal do nó 4 da treliça vista na figura abaixo. Considere os nós como rótulas perfeitas e as barras com inércia constante $EA = 533,33 \text{ kN}$. Note que, na tabela abaixo, os esforços para o carregamento original já foram fornecidos.



Barra	N	\bar{N}	L	$N \cdot \bar{N} \cdot L$
1	-2,000	0,500	4,0	-4,0
2	+4,000	1,000	4,0	16,0
3	+2,500	0,625	2,5	3,90625
4	-2,500	-0,625	2,5	3,90625
5	-5,000	0,000	2,5	0,0
$\Sigma =$				19,8125

Solução:



Utilizando as equações de equilíbrio, calculam-se as reações de apoio.

$$\sum F_x = 0 \quad \therefore H_A = 1$$

Em seguida pode-se resolver a equação: $\sum M_z = 0$, assim, tomando um eixo z que passa pelo ponto 2 temos:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow V_1 \times 4 + 1 \times 1,5 = 0 \Rightarrow V_1 = -0,375 \text{ kN}$$

• usando a equação: $\sum F_y = 0$, temos:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 0,375 \text{ kN}$$

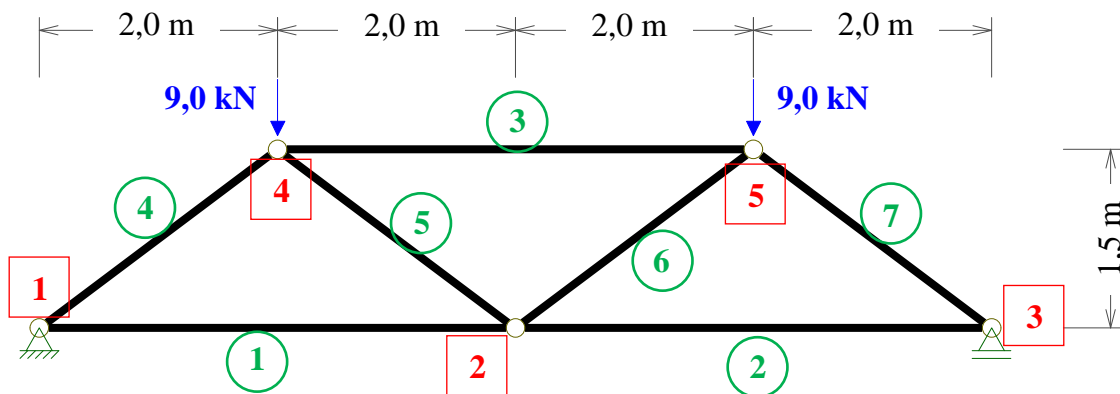
Equações de esforços normais para cada uma das barras: (sen $\alpha = 0,6$ e cos $\alpha = 0,8$)

$N_{1-3} \sin \alpha - 0,375 = 0$ $\therefore N_{1-3} = 0,625 \text{ kN}$ $N_{1-2} + N_{1-3} \cos \alpha - 1 = 0$ $\therefore N_{1-2} = 0,5 \text{ kN}$	$N_{2-4} \sin \alpha = 0$ $\therefore N_{2-4} = 0 \text{ kN}$ $N_{3-4} + N_{2-4} \cos \alpha - 1 = 0$ $\therefore N_{3-4} = 1 \text{ kN}$	$N_{2-4} \sin \alpha + N_{2-3} \sin \alpha + 0,375 = 0$ $\therefore N_{2-3} = -0,625 \text{ kN}$

$$\delta_3 = \frac{\sum N \bar{N} L}{EA} = \frac{18,8125}{533,33} = 0,0371487 \text{ m}$$

Resposta: O deslocamento horizontal do nó 4 é de **3,71 cm** (para direita)

3) Calcule o deslocamento vertical do nó 4 da treliça vista na figura abaixo. Considere os nós como rótulas perfeitas e as barras com inércia $EA = 31700 \text{ kN}$.



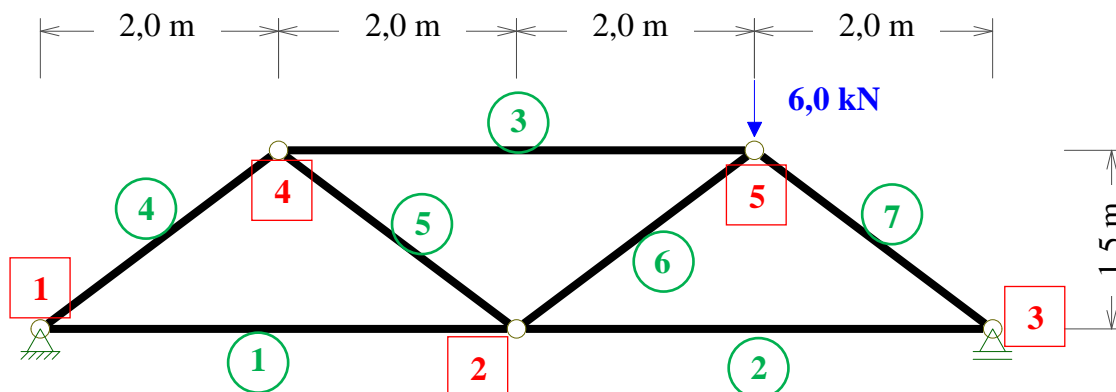
Solução:

Barra	N	\bar{N}	L	$N \cdot \bar{N} \cdot L$
1	12	1	4	48,000
2	12	0,33333	4	16,000
3	-12	-0,66667	4	32,000
4	-15	-1,25	2,5	46,875
5	0	-0,41667	2,5	0,000
6	0	0,41667	2,5	0,000
7	-15	-0,41667	2,5	15,625
$\Sigma =$				158,500

$$\delta = \frac{\sum N \bar{N} L}{EA} = \frac{158,5}{31700} = 0,005 \text{ m} \quad \therefore \delta = 5 \text{ mm}$$

Resposta: O deslocamento horizontal do nó 4 é de **5,00 mm** (para baixo)

4) Calcule o deslocamento vertical do nó 4 da treliça vista na figura abaixo. Considere os nós como rótulas perfeitas e as barras com inércia constante $EA = 3200$ kN. Note que, na tabela abaixo, os esforços para o carregamento original já foram fornecidos (menos a barra 3!).



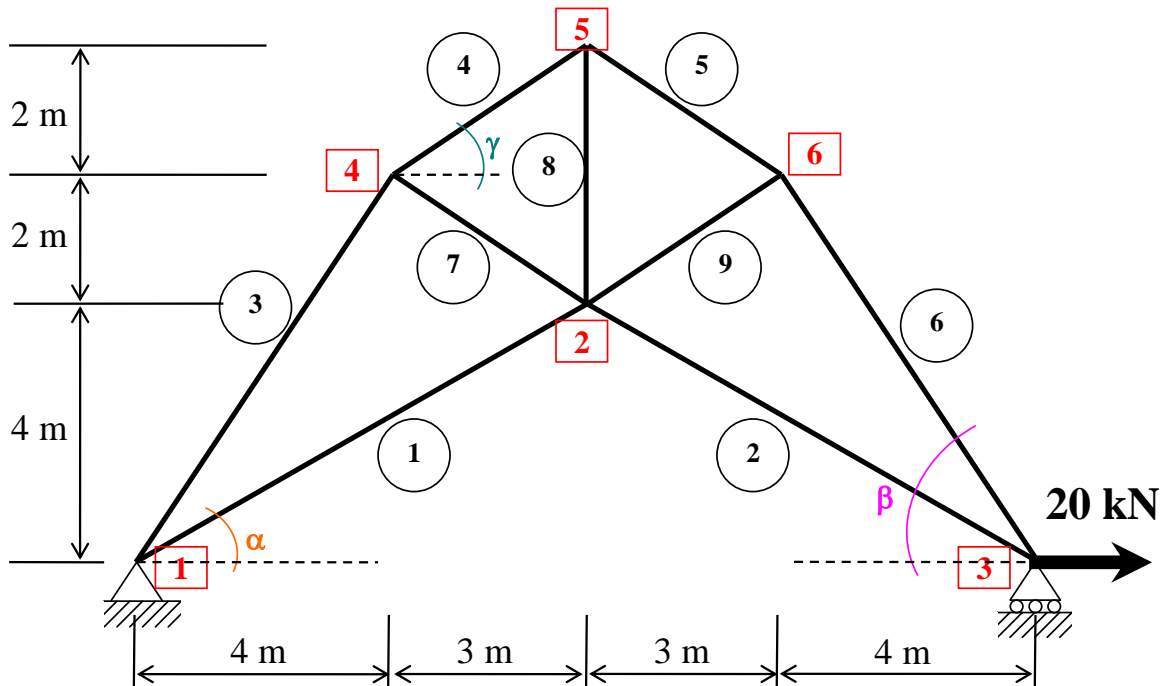
Solução:

Barra	N	\bar{N}	L	$N \cdot \bar{N} \cdot L$
1	+2,00	+1,0000	4,0	8,0000
2	+6,00	+0,3333	4,0	8,0000
3	-4,00	-0,6667	4,0	10,6667
4	-2,50	-1,2500	2,5	7,8125
5	+2,50	-0,4167	2,5	-2,6042
6	-2,50	+0,4167	2,5	-2,6042
7	-7,50	-0,4167	2,5	7,8125
$\Sigma =$				37,08396

$$\delta_{v4} = \sum \frac{N \bar{N} L}{EA} = \sum \frac{37,08396}{3200} = 0,0116 \text{ m}$$

Resposta: Deslocamento vertical do nó 4 é $\delta_{v4} = 11,6 \text{ mm}$ (para baixo)

5) Calcule o deslocamento horizontal do nó 3 da treliça vista ao lado. Todas as nove barras são tubos de aço ($E=210 \text{ GPa}$) com diâmetro externo de 10 cm e diâmetro interno 9,2 cm.



$$\text{sen } \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}; \quad \text{cos } \alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{3}{\sqrt{13}}; \quad \text{cos } \beta = \frac{4}{\sqrt{52}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\text{sen } \gamma = \frac{2}{\sqrt{13}}; \quad \text{cos } \gamma = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Solução:

Para o carregamento original, os esforços normais N são calculados abaixo:

Reações de Apoio

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_1 + 20 = 0$$

$$\therefore H_1 = 20 \text{ kN}$$

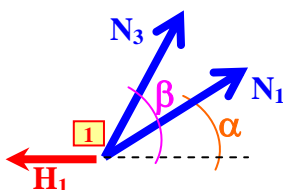
$$\sum M_{z(1)} = 0 \Rightarrow V_3 \times 14 = 0$$

$$\therefore V_3 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_3 = 0$$

$$\therefore V_1 = 0 \text{ kN}$$

Nó 1



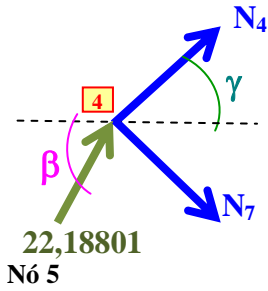
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_1 \cos \alpha + N_3 \cos \beta - H_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 \text{sen } \alpha + N_3 \text{sen } \beta = 0$$

$$\therefore N_1 = 37,21042 \text{ kN}$$

$$\therefore N_3 = -22,18801 \text{ kN}$$

Nó 4



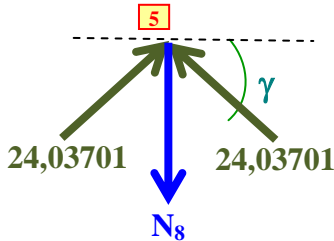
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_4 \cos \gamma + N_7 \cos \gamma + 22,18801 \cos \beta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_4 \sin \gamma - N_7 \sin \gamma + 22,18801 \sin \beta = 0$$

$$\therefore N_4 = -24,03701 \text{ kN}$$

$$\therefore N_7 = 9,245 \text{ kN}$$

Nó 5



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 24,03701 \sin \gamma + 24,03701 \sin \gamma - N_8 = 0$$

$$\therefore N_8 = 26,66667 \text{ kN}$$

Observações

- 1) Os esforços normais nas barras 2, 6, 5 e 9 são iguais aos esforços nas barras 1, 3, 4 e 7, respectivamente;
- 2) Os esforços normais para a carga unitária foram calculados dividindo-se por vinte os esforços normais para o carregamento original.

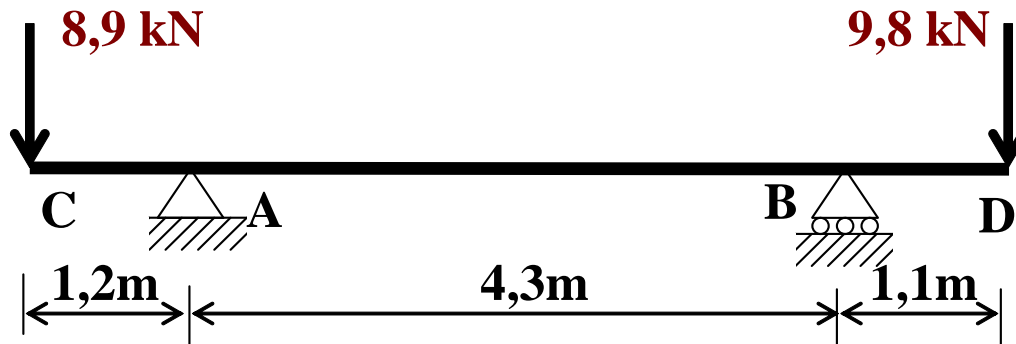
Barra	N	\bar{N}	L	$\bar{N} \cdot L$
1	37,21042	1,86052	8,06226	558,15629
2	37,21042	1,86052	8,06226	558,15629
3	-22,18801	-1,10940	7,21110	177,50410
4	-24,03701	-1,20185	3,60555	104,16038
5	-24,03701	-1,20185	3,60555	104,16038
6	-22,18801	-1,10940	7,21110	177,50410
7	9,24500	0,46225	3,60555	15,40833
8	26,66667	1,33333	4,00000	142,22226
9	9,24500	0,46225	3,60555	15,40833
$\Sigma =$				1852,6805

$$EA = 210 \text{ GPa} \times \frac{\pi}{4} [(10 \text{ cm})^2 - (9,2 \text{ cm})^2] = 210 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \times 12,063716 \times (10^{-2} \text{ m})^2 = 253338,03 \text{ kN}$$

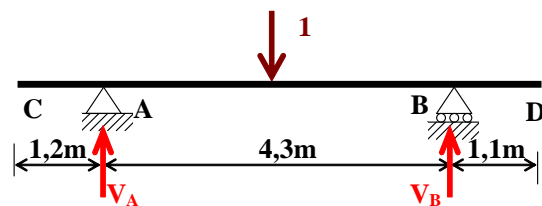
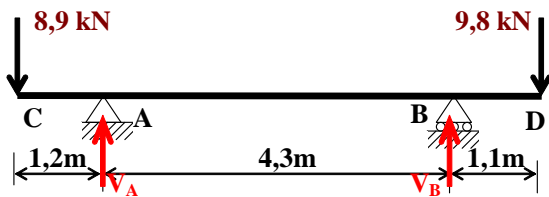
$$\sum_{i=1}^{11} \frac{N_i \bar{N}_i L_i}{EA} = \frac{1852,6805}{253338,03} = 0,0073131 \text{ m}$$

Resposta: Deslocamento horizontal do nó 3 é $\delta = 0,0073131 \text{ m}$ ou $\delta = 7,31 \text{ mm}$

6) Calcule o deslocamento vertical no meio do vão AB da viga biapoiada vista na figura abaixo. Considere a viga trabalhando fundamentalmente à flexão com inércia $EI = 8000 \text{ kN.m}^2$.



Solução:



Reações de apoio para o carregamento original

$\sum M_z = 0$, ou seja, tomando um eixo z que passa pelo ponto B temos:

$$V_A \times 4,3 - 8,9 \times 5,5 + 9,8 \times 1,1 = 0 \Rightarrow V_A = 8,87674 \text{ kN}$$

$\sum F_y = 0$, temos:

$$V_A + V_B - 8,9 - 9,8 = 0 \Rightarrow V_B = 9,82326 \text{ kN}$$

Tomando a origem de x em A, a equação de esforços no trecho AB é:

$$M_{AB}(x) = V_A x - 8,9(x + 1,2) \Rightarrow M_{AB}(x) = 8,87674x - 8,9(x + 1,2) \Rightarrow 0 \leq x \leq 4,3 \text{ m}$$

Procedendo de maneira análoga para a carga unitária, temos as seguintes equações de esforços:

$$\bar{M}_{AB}(x) = 0,5x \Rightarrow 0 \leq x \leq 2,15 \text{ m}$$

$$\bar{M}_{AB}(x) = 0,5x - 1(x - 2,15) \Rightarrow 2,15 \leq x \leq 4,3 \text{ m}$$

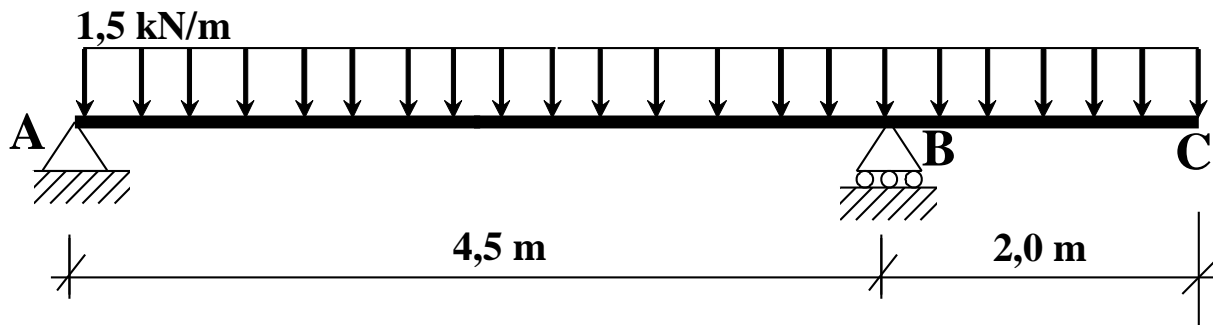
Assim o deslocamento no meio do vão é:

$$EI \delta_C = \int_0^{2,15} [8,87674x - 8,9(x + 1,2)](0,5x) dx + \int_{2,15}^{4,3} [8,87674x - 8,9(x + 1,2)](-0,5x + 2,15) dx = -24,79975$$

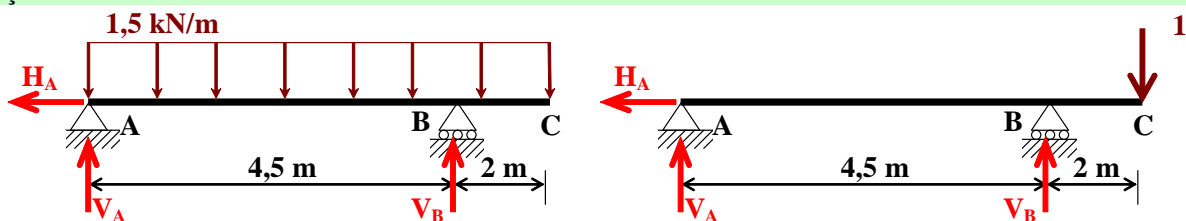
$$\Rightarrow \delta_C = \frac{-24,79975}{EI} = \frac{-24,79975}{8000} = -0,00310 \text{ m}$$

Resposta: Deslocamento vertical no meio do vão é $\delta = 3,10 \text{ mm}$ (para cima)

7) Calcule o deslocamento vertical do ponto C da viga biapoiada com balanço vista na figura abaixo. Considere a viga trabalhando fundamentalmente à flexão. Adote uma rigidez da seção transversal constante para todo o comprimento da viga $E.I = 609,44 \text{ kN.m}^2$.



Solução:



Reações de apoio para o carregamento original

$\sum M_z = 0$, ou seja, tomando um eixo z que passa pelo ponto B temos:

$$V_A \times 4,5 - (1,5 \times 6,5) \times 1,25 = 0 \Rightarrow V_A = 2,70833 \text{ kN}$$

$\sum F_y = 0$, temos:

$$V_A + V_B - (1,5 \times 6,5) = 0 \Rightarrow V_B = 7,04167 \text{ kN}$$

Tomando a origem de x em A, as equações de esforços nos trechos AB e BC serão:

$$M_{AB}(x) = V_A x - 1,5x \frac{x}{2} \Rightarrow M_{AB}(x) = 2,70833x - 0,75x^2$$

$$M_{BC}(x) = V_A x - 1,5x \frac{x}{2} + V_B(x - 4,5) \Rightarrow M_{BC}(x) = -31,6875 + 9,75x - 0,75x^2$$

Procedendo de maneira análoga para a carga unitária, temos as seguintes equações de esforços:

$$\bar{M}_{AB}(x) = V_A x \Rightarrow \bar{M}_{AB}(x) = -0,444x$$

$$\bar{M}_{BC}(x) = V_A x + V_B \times (x - 4,5) \Rightarrow \bar{M}_{BC}(x) = x - 6,5$$

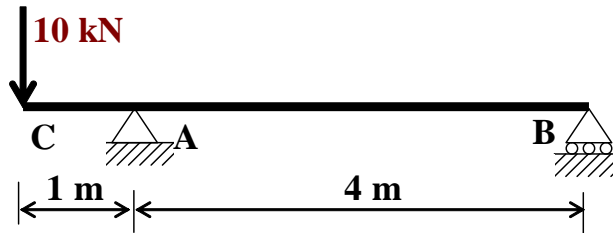
Assim o deslocamento em C:

$$EI \delta_C = \int_0^{4,5} (2,70833x - 0,75x^2)(-0,444x) dx + \int_{4,5}^{6,5} (-31,6875 + 9,75x - 0,75x^2)(x - 6,5) dx = 0,6094$$

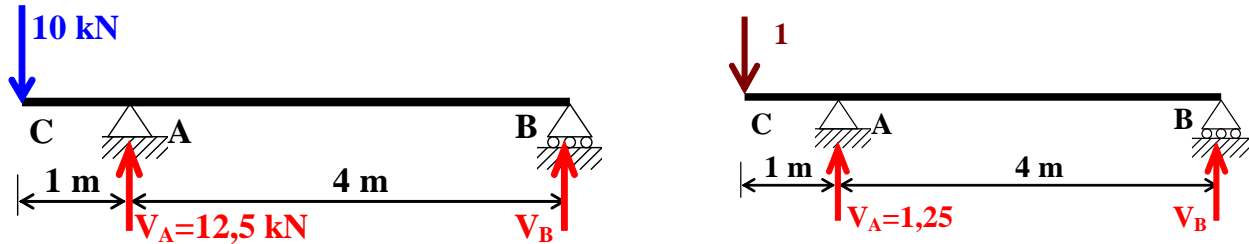
$$\Rightarrow \delta_C = \frac{0,6094}{EI} = \frac{0,6094}{609,44} = 0,001 \text{ m}$$

Resposta: Deslocamento vertical do nó C é $\delta=1,00 \text{ mm}$ (para baixo)

8) Calcule o deslocamento vertical da extremidade C da viga biapoiada vista na figura abaixo. Considere a viga trabalhando fundamentalmente à flexão com inércia $EI = 1000 \text{ kN.m}^2$.



Solução:



Reações de apoio para o carregamento original

$\sum M_z = 0$, ou seja, tomando um eixo z que passa pelo ponto B temos:

$$V_A \times 4,0 - 10 \times 5,0 = 0 \Rightarrow V_A = 12,5 \text{ kN}$$

$\sum F_y = 0$, temos:

$$V_A + V_B - 10 = 0 \Rightarrow V_B = -2,5 \text{ kN}$$

Tomando a origem de x em C, a equação de esforços nos trechos CA e AB são:

$$M_{AC}(x) = -10x \Rightarrow 0,0 \leq x \leq 1,0 \text{ m}$$

$$M_{AB}(x) = -10x + V_A(x-1) \Rightarrow M_{AB}(x) = -12,5 + 2,5x \Rightarrow 1,0 \leq x \leq 5,0 \text{ m}$$

Procedendo de maneira análoga para a carga unitária, temos as seguintes equações de esforços:

$$M_{AC}(x) = -x \Rightarrow 0,0 \leq x \leq 1,0 \text{ m}$$

$$M_{AB}(x) = -1,25 + 0,25x \Rightarrow 1,0 \leq x \leq 5,0 \text{ m}$$

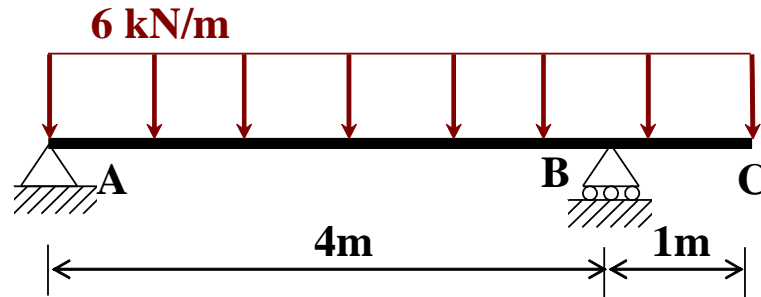
Assim o deslocamento no meio do vão é:

$$EI \delta_m = \int_{0,0}^{1,0} [-10x] \times [-x] dx + \int_{1,0}^{5,0} [-12,5 + 2,5x] \times [-1,25 + 0,25x] dx = 50/3$$

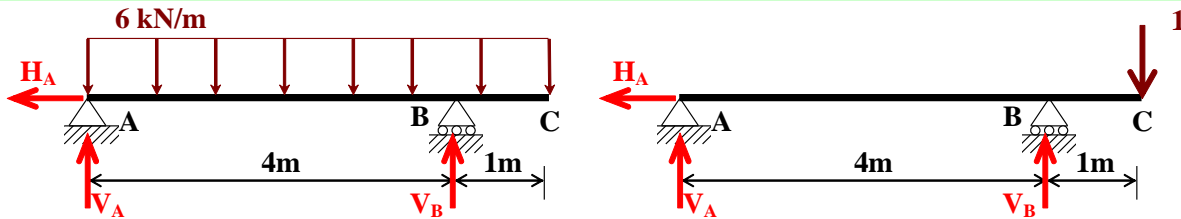
$$\Rightarrow \delta_m = \frac{110/3}{EI} = \frac{50/3}{1000} = 0,0167 \text{ m}$$

Resposta: Deslocamento vertical da extremidade C da viga é $\delta_C = 1,67 \text{ cm}$ (para baixo)

9) Calcule o deslocamento vertical da extremidade (nó C) da viga biapoiada vista na figura abaixo. Considere a viga trabalhando fundamentalmente à flexão com inércia $EI = 11250 \text{ kN.m}^2$.



Solução:



Reações de apoio para o carregamento original

$\sum M_z = 0$, ou seja, tomando um eixo z que passa pelo ponto B temos:

$$V_A \times 4 - (6 \times 5) \times 1,5 = 0 \Rightarrow V_A = 11,25 \text{ kN}$$

$\sum F_y = 0$, temos:

$$V_A + V_B - (6 \times 5) = 0 \Rightarrow V_B = 18,75 \text{ kN}$$

Tomando a origem de x em A, as equações de esforços nos trechos AB e BC serão:

$$M_{AB}(x) = V_A x - 6x \frac{x}{2} \Rightarrow M_{AB}(x) = 11,25x - 3x^2$$

$$M_{BC}(x) = V_A x - 6x \frac{x}{2} + V_B(x - 4) \Rightarrow M_{BC}(x) = -75 + 30x - 3x^2$$

Procedendo de maneira análoga para a carga unitária, temos as seguintes equações de esforços:

$$\bar{M}_{AB}(x) = V_A x \Rightarrow \bar{M}_{AB}(x) = -\frac{1}{4}x$$

$$\bar{M}_{BC}(x) = V_A x + V_B \times (x - 4) \Rightarrow \bar{M}_{BC}(x) = x - 5$$

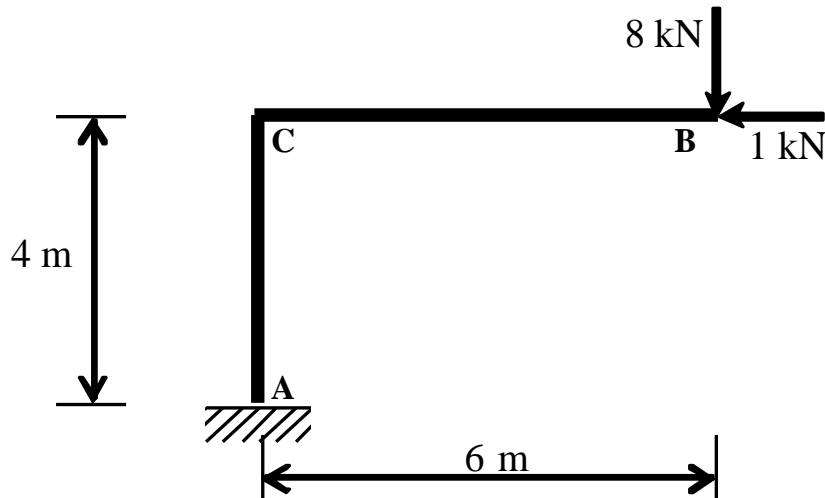
Assim o deslocamento em C:

$$EI \delta_C = \int_0^4 (11,25x - 3x^2) \left(-\frac{1}{4}x\right) dx + \int_4^5 (-75 + 30x - 3x^2)(x - 5) dx = -12 + 0,75 = -11,25$$

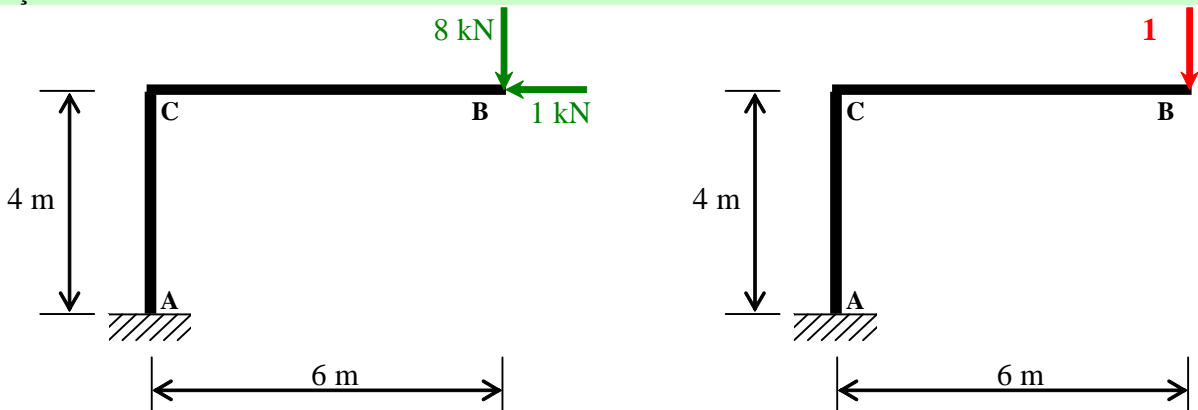
$$\Rightarrow \delta_C = \frac{-11,25}{EI} = \frac{-11,25}{11250} = -0,001 \text{ m}$$

Resposta: Deslocamento vertical do nó C é $\delta = 1,00 \text{ mm}$ (para cima)

10) Calcule o deslocamento vertical do nó B do quadro isostático visto na figura abaixo. Considere o quadro trabalhando fundamentalmente à flexão com inércia constante nas duas barras $EI = 135500 \text{ kN.m}^2$.



Solução:



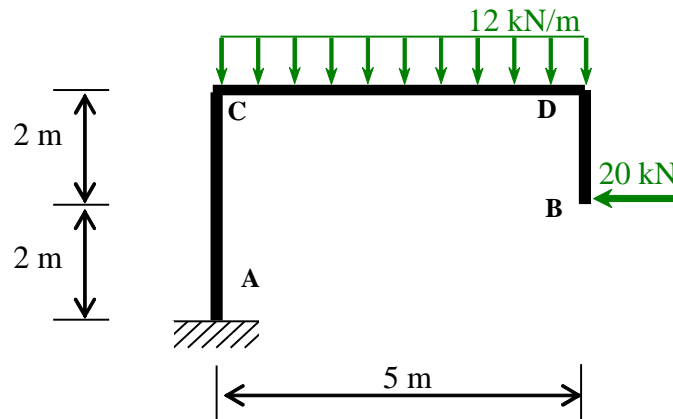
<p>Equações de momentos para o carregamento original</p> <p>Barra BC – origem do eixo x em B $M_{BC}(x) = 8x \Rightarrow 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$</p> <p>Barra AC – origem do eixo x em C $M_{BD}(x) = 48 - 1x \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$</p>	<p>Equações de momentos para a carga unitária</p> <p>Barra BC – origem do eixo x em B $\bar{M}_{BD}(x) = x \Rightarrow 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$</p> <p>Barra AC – origem do eixo x em C $\bar{M}_{BD}(x) = 6 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$</p>
---	---

$$EI \delta_{VB} = \int MM = \int_0^6 (8x)(x) dx + \int_0^4 (48 - x)(6) dx = 1680$$

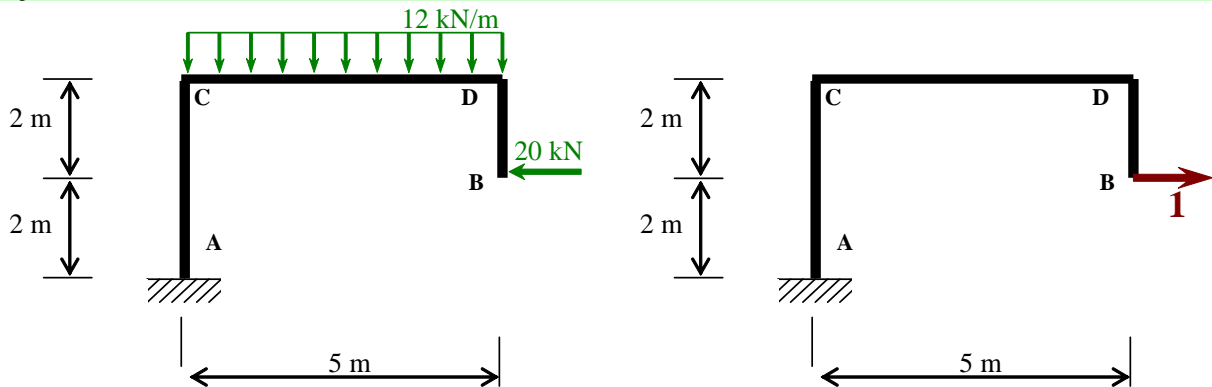
$$\Rightarrow \delta_{VB} = \frac{1680}{EI} = \frac{1680}{135500} = 0,0124 \text{ m}$$

Resposta: Deslocamento vertical do nó B é $\delta_{VB} = 1,24 \text{ cm}$ (para baixo)

11) Calcule os deslocamentos horizontal e vertical do nó B do quadro isostático representado pela figura abaixo. Considere o quadro trabalhando basicamente à flexão com inércia $EI = 80000 \text{ kN.m}^2$.



Solução:



Equações de momentos para o carregamento original	Equações de momentos para a carga unitária
Barra BD – origem do eixo x em B $M_{BD}(x) = 20x \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$	Barra BD – origem do eixo x em B $\bar{M}_{BD}(x) = -x \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$
Barra CD – origem do eixo x em D $M_{BD}(x) = 6x^2 + 40 \Rightarrow 0 \leq x \leq 5 \text{ m}$	Barra CD – origem do eixo x em D $\bar{M}_{BD}(x) = -2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 5 \text{ m}$
Barra AC – origem do eixo x em C $M_{BD}(x) = 190 - 20x \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$	Barra AC – origem do eixo x em C $\bar{M}_{BD}(x) = x - 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

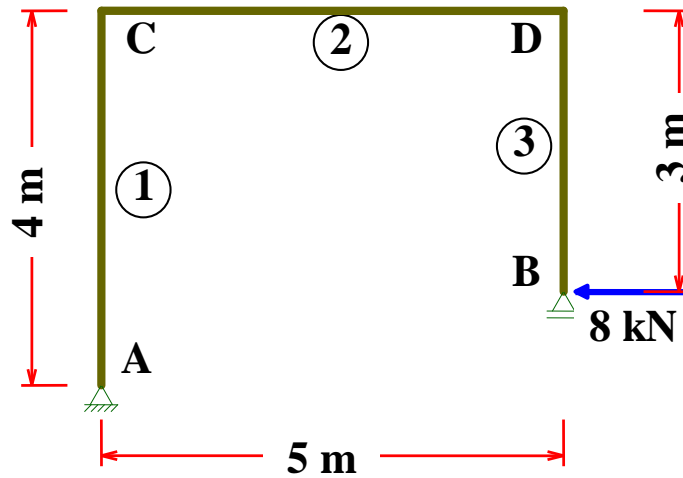
$$EI \delta_{HB} = \int MM = \int_0^2 (20x)(-x) dx + \int_0^5 (6x^2 + 40)(-2) dx + \int_0^4 (190 - 20x)(x - 2) dx = -1060$$

$$\Rightarrow \delta_{HB} = \frac{-1060}{EI} = \frac{-1060}{80000} = -0,01325 \text{ m}$$

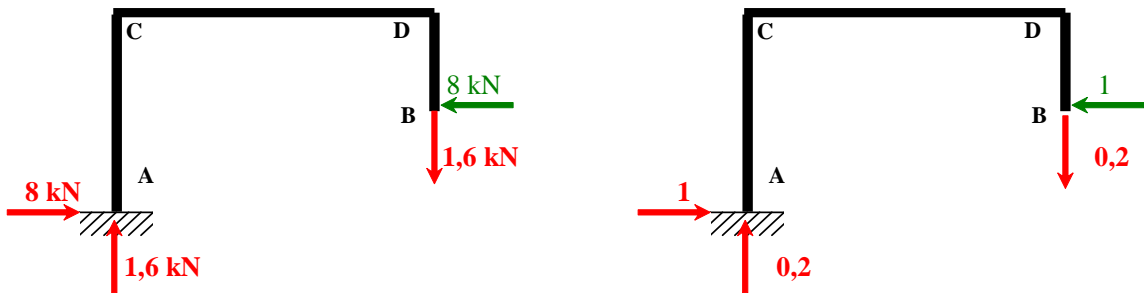
Deslocamento horizontal do nó B = 0,01325 m.

Resposta: Deslocamento horizontal do nó B é $\delta=13,3 \text{ mm}$ (para esquerda)

12) Calcule o deslocamento horizontal do apoio B do pórtico hiperestático representado pela figura abaixo. Considere as barras 1 e 3 de inércia $EI=20000 \text{ kN.m}^2$ e a barra 2 de inércia $4EI$, todas trabalhando fundamentalmente à flexão.



Solução:



Equações de momentos para o carregamento original	Equações de momentos para a carga unitária
Barra BD – origem do eixo x em B $M_{BD}(x) = 8x \Rightarrow 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$	Barra BD – origem do eixo x em B $\bar{M}_{BD}(x) = x \Rightarrow 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$
Barra CD – origem do eixo x em D $M_{CD}(x) = 24 + 1,6x \Rightarrow 0 \leq x \leq 5 \text{ m}$	Barra CD – origem do eixo x em D $\bar{M}_{CD}(x) = 3 + 0,2x \Rightarrow 0 \leq x \leq 5 \text{ m}$
Barra AC – origem do eixo x em A $M_{AC}(x) = 8x \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$	Barra AC – origem do eixo x em A $\bar{M}_{AC}(x) = x \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$\delta_{HB} = \int \frac{MM}{EI} = \int_0^3 \frac{(8x)(x)}{EI} dx + \int_0^5 \frac{(24 + 1,6)(3 + 0,2x)}{4EI} dx + \int_0^4 \frac{(8x)(x)}{EI} dx$$

$$\Rightarrow \delta_{HB} = 8 \int_0^3 \frac{(x^2)}{EI} dx + 8 \int_0^5 \frac{(3 + 0,2x)^2}{4EI} dx + 8 \int_0^4 \frac{(x^2)}{EI} dx = \frac{366}{EI}$$

$$\Rightarrow \delta_{HB} = \frac{366}{20000} = 0,0183 \text{ m}$$

Resposta: Deslocamento horizontal do nó B é $\delta=18,3 \text{ mm}$ (para esquerda)