

## Método de Newton-Raphson (N-R)

No estudo do Método Iterativo Linear, temos que:

- uma das condições de convergência é que  $|\psi'(x)| \leq M \leq 1, \forall x \in I$ , onde  $I$  é um intervalo centrado na raiz;
- a convergência do método será mais rápida quanto menor for  $|\psi'(\bar{x})|$

O que o método de N-R faz é escolher para a função de iteração a função  $\psi(x)$  tal que  $\psi'(x) = 0$ . Pode-se provar que a função de iteração é:

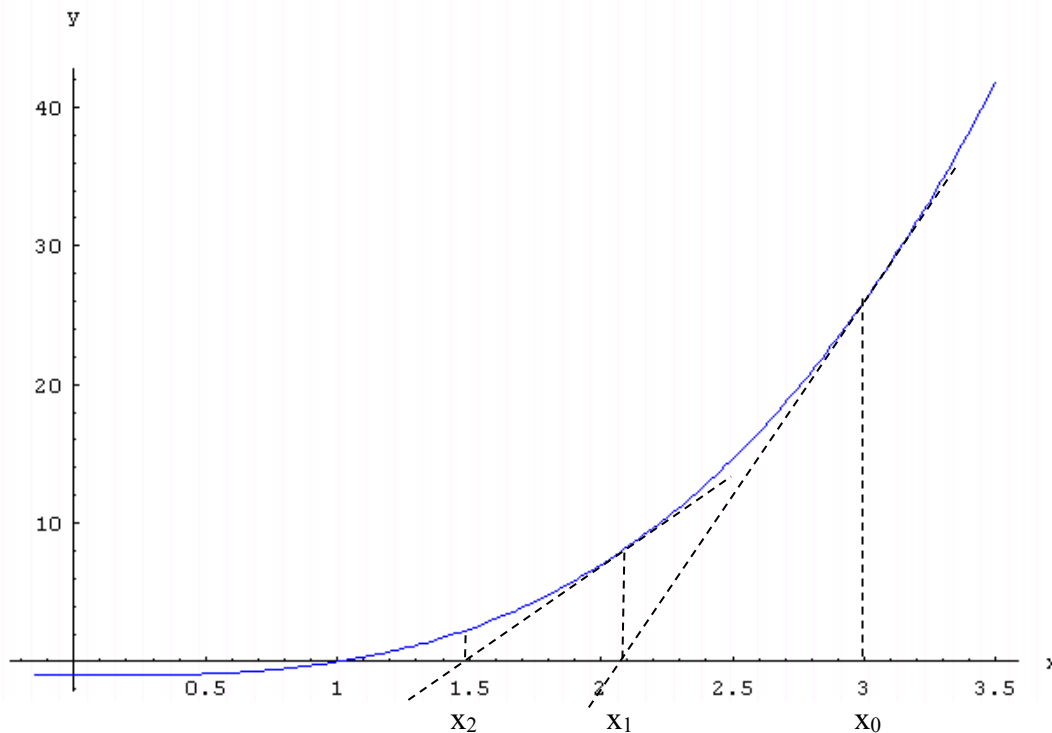
$$\psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Assim, escolhido  $x_0$ , a seqüência  $\{x_k\}$  será determinada por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### Interpretação Geométrica

Dado  $x_k$ , o ponto  $x_{k+1}$  é obtido de tal forma que  $x_{k+1}$  é a abscissa do ponto de intersecção entre o eixo  $ox$  e a reta  $f(x)$  em  $(x_k, f(x_k))$ .



Exemplos:

1) Encontre uma raiz da função  $f(x) = x - \cos(x)$ . Adote  $N_{\max}=20$ ,  $\varepsilon=10^{-3}$  e  $x_0=0,5$ .

**Solução:**

A função de iteração é:

$$\psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - \cos(x)}{1 + \sin(x)}$$

Assim, temos a primeira iteração:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,5 - \frac{0,5 - \cos(0,5)}{1 + \sin(0,5)} = 0,75522 \Rightarrow E = |x_1 - x_0| \not< \varepsilon$$

Segunda iteração:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,75522 - \frac{0,75522 - \cos(0,75522)}{1 + \sin(0,75522)} = 0,73914 \Rightarrow E = |x_2 - x_1| \not< \varepsilon$$

Terceira iteração:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,73914 - \frac{0,73914 - \cos(0,73914)}{1 + \sin(0,73914)} = 0,73909 \Rightarrow E = |x_3 - x_2| < \varepsilon$$

$\therefore$  a raiz de  $f(x)$  é  $x = 0,73909$ . Note que  $|f(x)|=0,0000081$  em apenas 3 ( $<N_{\max}$ ) iterações!

2) Compare os métodos abaixo para encontrar uma raiz da função  $f(x) = x - \cos(x)$ .

Adote  $\varepsilon=10^{-3}$  e  $N_{\max}=20$ .

**Solução:**

Note que o intervalo escolhido para os métodos Bisseção e Falsa Posição foi  $[0,7 ; 0,8]$  e que o valor inicial escolhido para os métodos MIL e Newton-Raphson foi 0,5

| i     | Bisseção    | Falsa Posição | MIL              | Newton-Raphson |
|-------|-------------|---------------|------------------|----------------|
| 1     | 0,75        | 0,73856544    | 0,877582562      | 0,755222417    |
| 2     | 0,725       | 0,739078362   | 0,639012494      | 0,739141666    |
| 3     | 0,7375      |               | 0,802685101      | 0,739085134    |
| 4     | 0,74375     |               | 0,694778027      |                |
| 5     | 0,740625    |               | 0,768195831      |                |
| 6     | 0,7390625   |               | 0,719165446      |                |
| 7     | 0,73984375  |               | 0,752355759      |                |
| 8     |             |               | 0,730081063      |                |
| 9     |             |               | 0,745120341      |                |
| 10    |             |               | 0,735006309      |                |
| 11    |             |               | 0,741826523      |                |
| 12    |             |               | 0,737235725      |                |
| 13    |             |               | 0,740329652      |                |
| 14    |             |               | 0,738246238      |                |
| 15    |             |               | 0,739649963      |                |
| Erro= | 0,000781250 | 0,000512922   | 0,000945423      | 0,000056532    |
|       |             |               | $g(x) = \cos(x)$ |                |

Faça o mesmo para as funções:

a)  $f(x) = e^x - 4x$

b)  $f(x) = x^3 - 9x + 3$